

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО
26 ЯНВАРЯ 2015

1. Вычислите интеграл $\int_{\gamma} (z - a)^n dz$ по контуру $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t < 2\pi$, $r > 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. Вычислите интеграл $\int_{\gamma} z^n dz$, где $n \in \mathbb{Z}$, а γ — некоторый путь из a в b . (Убедитесь, что при $n \neq -1$ интеграл не зависит от выбора пути, а при $n = -1$ зависит, и опишите как.)

3. Вычислите интеграл $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + \frac{1}{4}}$ по единичной окружности.

4. Найдите все возможные значения интеграла $\int_C \frac{dz}{z(z^2 - 1)}$ при различных выборах контура C (C — замкнутый контур без самопересечений, не проходящий ни через одну из точек $0, 1, -1$).

5. Вычислите интеграл $\oint_{|z|=1} \cos(z^{-1}) dz$.

6. Вычислите интеграл $\int_{\gamma} \bar{z} dz$, где γ — окружность радиуса R с центром в точке $a \in \mathbb{C}$, проходимая против часовой стрелки.

7. Вычислите интеграл $\int_{\gamma} \frac{\bar{z}}{z} dz$, где γ — окружность радиуса R с центром в точке a ($|a| \neq R$).

8. Вычислите интегралы (а) $\iint_{\mathbb{C}} e^{-\alpha|z|^2} dx dy$, (б) $\iint_{\mathbb{C}} e^{-\alpha|z|^2 + az + \bar{a}\bar{z}} dx dy$.

Направление обхода контуров в контурных интегралах предполагается положительным (против часовой стрелки).