Теория функций комплексного переменного – 2015
Листок 1

срок сдачи 30.01.2015

1. Приведите пример функции $f(z, \bar{z})$, для которой предел $z \to 0$ вдоль любой прямой существует, и все такие пределы равны между собой, но при этом $\lim\limits_{z \to 0} f(z, \bar{z})$ не существует.

2. Пусть $f(z)$ – дифференцируемая функция комплексного переменного в точке a. Докажите, что функция $\overline{f(\bar{z})}$ дифференцируема в точке $\bar{a}$.

3. а) Напишите уравнение окружности, проходящей через три (различные) точки z_1, z_2, z_3, не лежащие на одной прямой.

б) Докажите, что четыре (различные) точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности или прямой тогда и только тогда, когда их двойное отношение $\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}$ вещественно.

4. Докажите, что при преобразовании $z \mapsto 1/z$ окружность переходит в окружность или прямую, а также что прямая переходит в окружность или прямую.

5. а) Докажите, что если голоморфная в некоторой области функция $f(z)$ вещественна (т.е. принимает только вещественные значения), то она постоянна.

б) Пусть функция $f(z)$ голоморфна в некоторой области D, и $|f(z)| = 1$ всюду в этой области. Докажите, что $f(z) \equiv \text{const}$.

6. Восстановите голоморфную функцию $f(z)$, $z = x + iy$, по заданной функции

а) $\operatorname{Re} f(z) = x \cos x \cosh y + y \sin x \sinh y$ (при условии, что $f(0) = 0$),

б) $\arg f(z) = xy \pmod{2\pi}$ (при условии, что $f(0) = 1$).

Вещественнозначная функция двух переменных $F(x, y)$ называется *гармонической*, если $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$.

7. а) Пусть $f(z)$ – голоморфная функция. Докажите, что функции $\mathrm{Re} f$ и $\mathrm{Im} f$ – гармонические. Что можно сказать о функциях $|f|$ и $\arg f$?

б) Пусть $F(x, y)$ – гармоническая функция. Для каких функций G функция $G(F(x, y))$ тоже будет гармонической?

8. Найдите все гармонические функции вида а) $F = \varphi(x^2 + y^2)$, б) $F = \varphi(x^2 - y^2)$, в) $F = \varphi(y/x)$.