Уравнения в частных производных

Лектор В.В.Чепыжов

Факультет математики ВШЭ, 2015г.

Лекция 1

§1. Введение

Теория дифференциальных уравнений с частными производными имеет две характерные особенности. Во-первых, она является основным инструментом исследований в современной математической физике. Как известно, теория обыкновенных дифференциальных уравнений начала развиваться в XVIII веке сразу после возникновения дифференциального и интегрального исчисления. Именно через обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) новое исчисление шло к задачам геометрии и механики. В небесной механике удалось не только объяснить известные ранее факты, но и сделать новые открытия (например, планета Нептун была открыта с помощью анализа ОДУ).

Уравнения в частных производных (УрЧП) стали изучаться значительно позже в виде конкретных уравнений, которые возникали в физике. Это привело к появлению в середине XVIII века новой ветви анализа – уравнений математической физики. Основы этой науки были заложены в трудах Д'Аламбера, Эйлера, Бернулли, Лагранжа, Лапласа, Пуассона, Фурье. Эти ученые исследовали конкретные задачи математической физики, а разработанные ими идеи и методы оказались применимы к широким классам ДУ, что послужило в конце XIX века основой для развития общей теории УрЧП.

Другая особенность теории УрЧП – ее тесная связь с другими разделами математики: с функциональным анализом и теорией функций, топологией, алгеброй, комплексным анализом и другими. УрЧП используют основные понятия и методы этих областей математики и, в свою очередь, влияют на их проблематику и направление исследований. Классический пример – это исследование колебаний струны. Уравнение колебаний струны было выведено Д'Аламбером в 1747 году. Он также получил формулу, представляющую общее решение этого уравнения. Эйлер получил формулу, которая дает решение задачи Коши для уравнения колебаний струны. Эта формула теперь называется формулой Д'Аламбера. Бернулли утверждал, что всякое решение этого уравнения представляется тригонометрическим рядом. Спор Эйлера с Д'Аламбером и Бернулли о природе решений уравнения колебаний струны имел важное значение для развития математической физики, анализа и особенно теории тригонометрических рядов. Дальнейшее исследование проблемы о разложении функций в тригонометрические ряды было проделано Фурье в 1822 г. в связи с задачами о распространении тепла, а затем в работах Дирихле были впервые сформулированы достаточные условия разложимости функции в тригонометрический ряд.

Итак, мы видим, что вопрос о представлении функции тригонометрическим рядом впервые возник в задачах математической физики и в значительно мере способствовал созданию современной теории множеств и теории функций. При изучении конкретных уравнений из физических задач часто создавались общие методы, которые применялись вначале без строгого математического обоснования к широкому кругу проблем. Например, так возники метод Фурье, метод Рица, метод Галеркина, методы теории возмущений и др. Эффективность этих методов заставляла искать для них строгое математическое обоснование. Это приводило к созданию новых математических теорий и новых направлений исследований (теория интеграла Фурье, теория разложения по собственным функция и пр.)

При постановке математической задачи, связанной с изучением физического явления, в первую очередь выделяют характеризующие его величины. Такими величинами могут быть плотность, скорость, температура и т.д. Затем выбирается и математически формулируются физические законы, которые могут быть положены в основу теории данного явления. Эти законы должны быть простыми и непротиворечивыми. Как правило, эти законы могут быть записаны в виде соотношений между основными характеристиками явления и их частными производными в данной точке пространства и в данный момент времени. Возможность такой записи, по существу, есть следствие локальности всех известных типов взаимодействия, хотя при выводе уравнений часто удобно вначале использовать какие-то интегральные законы сохранения (например, законы сохранения массы, импульса, энергии, электрического заряда и т.п.), и лишь потом переходить к локальным уравнениям, предположив достаточную гладкость исследуемых величин. Приведем примеры такого вывода уравнений, описывающих физические процессы.

§2. Уравнение колебаний

Многие задачи механики (о колебании струн, стержней, мембран и трехмерных объемов), а так же физики (об электромагнитных колебаниях) приводят к уравнению следующего вида:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p\nabla u) - qu + F(x,t) \tag{1}$$

где $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$. Неизвестная функция $u(x,t)$ зависит от n $(n = 1, 2, 3)$ пространственных переменных $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и времени t. Коэффициенты ρ, p, q определяются свойствами среды. Функция $F(x,t)$ – это плотность внешнего возмущения. В уравнении (1) $\operatorname{div}(p\nabla u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$.

Выведем уравнение (1) упругих поперечных колебаний струны. Струной называется упругая нить, не сопротивляющаяся изгибу $(n = 1)$. Пусть в плоскости (x, u) струна совершает поперечные колебания около своего положения равновесия, которое совпадает с осью x. Обозначим через $u(x,t)$ величину отклонения струны от положения равновесия в точке x в момент времени t. Значит, $u = u(x,t)$ – график струны в момент времени t. Так как струна не сопротивляется изгибу, то ее сила натяжения $\vec{T}(x,t)$ в точке x в момент времени t направлена по касательной к струне в точке x. (См. Рис. 1.).

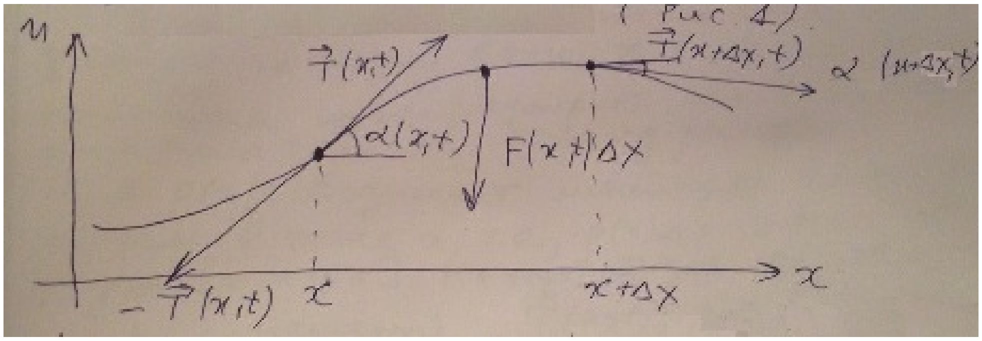

Рис. 1:

Найдем силу натяжения $\vec{T}(u,t)$. По закону Гука, сила натяжения пропорциональна относительному удлинению струны. Длина струны на отрезке $[x, x+\Delta x]$ вычисляется по формуле:

$$l = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}(y,t)\right)^2}\,dy = \Delta x \cdot \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}(\xi,t)\right)^2}.$$

Здесь мы применили теореме о среднем, где $\xi \in [x, x+\Delta x]$ – некоторая промежуточная точка. Значит, относительное удлинение струны на отрезке $[x, x+\Delta x]$

$$\frac{l}{\Delta x} = \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}(\xi,t)\right)^2} \to \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2} \quad \text{при } \Delta x \to 0.$$

Следовательно, модуль силы натяжения

$$|T(x,t)| = T_0 \cdot \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2} = T_0 \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha},$$

где T_0 – сила натяжения в положении равновесия, которое совпадает с осью x. Очевидно, что сила натяжения T_0 не зависит от x, когда натянутая струна находится в положении равновесия.

Пусть $\vec{T}(u,t) = (T_x(x,t), T_u(x,t))$ – проекции вектора на оси x и u. Тогда,

$$T_x(x,t) = |T(x,t)| \cdot \cos\alpha = T_0 \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \cos\alpha = T_0$$

не зависит от x! Найдем проекцию силы натяжения на ось u:

$$T_u(x,t) = |T(x,t)| \cdot \sin\alpha = T_0 \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \sin\alpha = T_0 \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = T_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x,t). \tag{2}$$

Пусть $F(x,t)$ обозначает (известную) плотность внешней силы, которая действует на струну в точке x в момент времени t и направлена перпендикулярно оси x. Например, это может быть сила тяжести $F(x,t) = -g \cdot \rho(x)$. Здесь $\rho(x)$ обозначает линейную плотность струны в точке x, т.е., $\rho(x)\Delta x$ – масса отрезка струны $[x, x+\Delta x]$. На этот отрезок действуют силы натяжения $\vec{T}(x+\Delta x, t)-\vec{T}(x,t)$ и внешняя сила $\vec{F}(x,t)\Delta x$, сумма которых по закону Ньютона должна равняться произведению массы отрезка на его ускорение. Проекция сил на ось x равна нулю! (это подтверждает предположение, что каждая точка x перемещается перпендикулярно оси x). Проекция нашего векторного равенства на ось u равна (см. (2)):

$$T_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, t) - T_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) - F(x,t)\cdot\Delta x = \rho(x)\cdot\Delta x\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$

Следовательно,

$$\rho(x)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = T_0\cdot\frac{1}{\Delta x}\cdot\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right] - F(x,t).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и считая, что функция $u_(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по x и по t, получаем уравнение

$$\rho(x)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - F(x,t). \tag{3}$$

Это уравнение называется *уравнением упругих поперечных колебаний струны*. При $F \neq 0$ колебания называются вынужденными (например, когда $F = -g\cdot\rho(x)$). При $F = 0$ – свободными.

Если струна имеет постоянную плотность $\rho(x) = \rho$, то уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \tag{4}$$

где обозначено $a^2 = T_0/\rho, f = F/\rho$. Это уравнение принято называть *одномерным волновым уравнением.*

Уравнение (1) также описывает продольные колебания упругого стержня ($n = 1$)

$$\rho(x)\cdot S(x)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)S(x)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,t), \tag{5}$$

где $S(x)$ – площадь поперечного сечения стержня, $E(x)$ - модуль Юнга в точке x.

Аналогично выводится уравнение поперечных колебаний мембраны ($n = 2$):

$$\rho(x)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + F(x,t).$$

Если плотность мембраны ρ – постоянная, то уравнение упрощается:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + f(x,t), \tag{6}$$

где $a^2 = T_0/\rho,\ f = F/\rho$. Уравнение (6) называется *двумерным волновым уравнением.*

Трехмерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) + f(x,t) \tag{7}$$

описывает распространение звука в среде и электромагнитные волны в однородной непроводящей среде.

Волновые уравнения принято записывать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x,t), \tag{8}$$

где Δ – оператор Лапласа:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

§3. Уравнение диффузии

Процессы распространения тепла и диффузии описываются следующим общим уравнением диффузии:

$$\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = div(p \cdot \nabla u) - qu + F(x,t). \tag{9}$$

Выведем уравнение распространения тепла. Обозначим через $u(x,t)$ температуру среды в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t, а через $\rho(x), c(x), k(x)$ – плотность, удельную теплоемкость и коэффициент теплопроводности среды в точке x. Пусть $F(x,t)$ – интенсивность источника тепла. Вычислим баланс тепла в произвольном объеме V за время $(t, t+\Delta t)$. Обозначим через S границу V, и пусть $\vec{n}$ – внешняя нормаль к S. Согласно закону Фурье, через поверхность S в объем V поступает количество тепла

$$Q_1 = \int\int_S k \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS \cdot \Delta t = \Delta t \cdot \int\int_S (k \cdot \nabla u, \vec{n})\, dS$$

которое, по формуле Гаусса-Остроградского равно

$$Q_1 = \Delta t \int\int\int_V div(k \cdot \nabla u) dx.$$

Напоминание: формула Гаусса-Остроградского.

Пусть $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$, $\vec{f} = \vec{f}(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к S, $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, $S \in C^1$, $\vec{f} \in C^1(\bar{V})$. Тогда

$$\int\int_S (\vec{f}, \vec{n}) dS = \int\int\int_V div \vec{f}(x) dx.$$

где $div f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, $(\vec{f}, \vec{n}) = \sum_{i=1}^3 f_i n_i$, $f_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

В нашем случае формула Гаусса-Остроградского применяется к вектор-функции $\vec{f} = k \cdot \nabla u = k \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \right)$.

Вернемся к уравнению диффузии. За счет тепловых источников в объеме V возникает количество тепла $Q_2 = \int\int\int_V F(x,t)dx\Delta t$. Так как температура в объема V за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ выросла на величину $u(x, t+\Delta t) - u(x,t) \approx \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \Delta t$, то для этого необходимо затратить количество тепла $Q_3 = \int\int\int_V c \cdot \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dx\Delta t$.

С другой стороны, имеем равенство $Q_3 = Q_1 + Q_2$, из которого следует, что

$$\int\int\int_V \left[div(k \cdot \nabla u) + F - c \cdot \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx\Delta t = 0.$$

Откуда, в силу произвольности объема V, получаем уравнение распространения тепла

$$c \cdot \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = div(k \cdot \nabla u) + F(x,t). \tag{10}$$

Если среда однородна, т.е., функции c, ρ и k не зависят от x и t, то уравнение (10) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla u + f, \tag{11}$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, $f = \frac{F}{c\rho}$. Уравнение (11) называется *уравнением теплопроводности*.

Аналогично выводится уравнение диффузии частиц. При этом вместо закона Фурье нужно воспользоваться законом Нэрнста для потока частиц ΔQ через элемент поверхности ΔS за единицу времени:

$$\Delta Q = -D \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Delta S,$$

где $D(x)$ – коэффициент диффузии и $u(x,t)$ – плотность частиц в точке x в момент времени t. Уравнение для $u(x,t)$ будет иметь вид (9), где ρ обозначает коэффициент пористости $p = D$, q – характеризует поглощение среды.

§4. Стационарное уравнение

Мы рассматривали эволюционные уравнения, которые зависели от времени t. Для установившихся процессов, если $F(x,t) = F(x)$, можно ожидать, что решение $u(x,t) \equiv u(x)$ – не зависит от времени. Уравнение колебаний (1) и диффузии (9) принимают вид

$$-div(\rho \cdot \nabla u) + q \cdot u = F(x). \tag{12}$$

При $p = const$, $q = 0$ уравнение (12) называют *уравнением Пуассона*:

$$\Delta u = -f, \tag{13}$$

где $f = \frac{F}{p}$. При $f \equiv 0$ уравнение (13) называет *уравнением Лапласа*:

$$\Delta u = 0.$$

Пусть в волновом уравнении (7) внешнее возмущение $f(x,t)$ является периодическим по времени t с частотой ω и с амплитудой $a^2 f(x)$:

$$f(x,t) = a^2 \cdot f(x) \cdot e^{i\omega t}.$$

Если искать периодическое возмущение $u(x,t)$ с той же частотой ω и неизвестной амплитудой $u(x)$ в виде

$$u(x,t) = u(x) \cdot e^{i\omega t}$$

то для функции $u(x)$ получим уравнение

$$\Delta u + k^2 \cdot u = -f(x),$$

где $k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$, называемое *уравнением Гельмгольца*.

Вот еще один важный пример стационарного уравнения. Рассмотрим потенциальное течение жидкости без источников, точнее, пусть внутри области V с границей S имеет место стационарное течение несжимаемой жидкости (плотность $\rho = const$), характеризуемое вектором скорости $\vec{v}(x_1, x_2, x_3)$.

Если течение жидкости безвихревое ($rot\vec{v} = 0$), то скорость $\vec{v}$ является потенциальным вектором, т.е.,

$$\vec{v} = \nabla u, \tag{14}$$

где $u(x)$ – скалярная функция, называемая потенциалом скорости. При отсутствии источников масса жидкости не меняется, т.е.,

$$\int\int_S \rho \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = 0.$$

По теореме Гаусса-Остроградского

$$\int\int_S \rho \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = \int\int\int_V \rho \cdot div\,(\vec{v})\,dx = 0.$$

Поскольку области V – произвольный, получаем тождество $(\vec{v}) = 0$. Подставляем $\vec{v}$ из (14) и получаем уравнение $div(\nabla u) = 0$ или

$$\Delta u = 0,$$

т.е., приходим опять к уравнению Лапласа. Еще раз убеждаемся, какое это важное уравнение.

§5. Границы применимости математических моделей

Математическое описание реальных явлений с помощью дифференциальных уравнений является определенной идеализацией. Например, закон Гука является приближенным, а закон теплопередачи Фурье можно уточнять с учетом молекулярной структуры вещества. Поэтому выводы, полученные с помощью исследования или даже точного решения полученных дифференциальных уравнений тоже являются приближенными. Например, уравнение теплопроводности предсказывает бесконечную скорость распространения тепла (даже от точечного источника), что, разумеется, абсурдно. В то же время, этот эффект мало влияет на расчеты теплопередачи в технике, где математическая теория уравнения теплопроводности весьма успешно применяется. Это относится и ко многим другим математическим моделям, основанным на УрЧП. Бывает, однако, что выводы, полученные на основе математическое модели, заметно расходятся с результатами опыта. Это говорит о несовершенстве модели и о необходимости ее замены с учетом других законов, более точно отражающих особенности изучаемого объекта. Дополнительные предположения о гладкости функций, описывающих поведение основных параметров, обычно предполагают при выводе ДУ с целью упростить математическую запись законов природы. Однако эти предположения не всегда удобны или физически оправданы. В современной теории дифференциальных уравнений это вызвало к жизни концепцию *обобщенного решения*, которая отражает возврат от ДУ к интегрально-дифференциальным уравнениям, возникающим еще в процессе построения модели.

Лекция 2

§1. Классификация уравнений

УрЧП – это уравнение вида:

$$\Phi\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}(x); \frac{\partial^2 u}{\partial x_k x_l}(x), ...\right) = 0,$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, а $u(x)$ – неизвестная функция, которую необходимо найти. *Порядком* дифференциального уравнения называется максимальный порядок входящих в него производных. УрЧП называется *линейным*, если оно линейно относительно неизвестной функции и всех ее частных производных. Уравнение называется *квазилинейным*, если оно линейно относительно всех старших производных. Например, уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + u^2 = 0$$

является квазилинейным уравнением второго порядка. Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a(x_1, x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 2u$$

линейное уравнение второго порядка. А уравнение

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2 = 2u$$

не линейное и не квазилинейное.

Решением уравнения называется любая функция $u(x)$, $x \in \Omega \in \mathbb{R}^n$, которая, будучи подставлена в уравнение, обращает его в тождество при всех $x \in \Omega$. В этом курсе мы будем заниматься главным образом линейными уравнениями второго порядка. На прошлой лекции мы рассмотрели примеры таких уравнений. Прежде чем формулировать математические постановки краевых задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка, необходимо их классифицировать.

§2. Классификация уравнений в точке

Рассмотрим квазилинейное уравнение второго порядка:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x, u, \nabla u) = 0 \tag{1}$$

при $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ с непрерывными коэффициентами $a_{ij}(x)$. Выясним, как преобразуется уравнение (1) при невырожденной замене независимых переменных $y = y(x)$

$$\begin{cases} y_l = y_l(x_1, x_2, ..., x_n), l = 1, 2, ..., n \\ y_l \in C^2, detD \neq 0, D = \left\{\dfrac{\partial y_l}{\partial x_i}\right\}_{i=1,...,n}^{l=1,...,n}. \end{cases} \tag{2}$$

Так как $detD \neq 0$, то в некоторой окрестности любой точки x можно выразить переменные x через переменные y, $x = x(y)$. Обозначим $u(x(y)) = \tilde{u}(y)$, тогда $\tilde{u}(y(x)) = u(x)$. Найдем выражение для частных производных порядка 1 и 2:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial y_l}{\partial x_i};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_k \partial y_l} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{3}$$

Подставляем (3) в (1) и получаем:

$$\sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_k \partial y_l} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial y_l}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi^*(y, \tilde{u}, \nabla \tilde{u}) = 0. \tag{4}$$

Обозначим через $\tilde{a}_{k,l}$ новые коэффициенты при старших производных:

$$\tilde{a}_{k,l}(y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x(y)) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial y_l}{\partial x_j}. \tag{5}$$

Перепишем уравнение (4) в виде

$$\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{a}_{kl}(y) \cdot \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_k \partial y_l} + \tilde{\Phi}(y, \tilde{u}, \nabla \tilde{u}) = 0. \tag{6}$$

Зафиксируем точку x_0. Обозначим $y_0 = y(x_0)$, $\alpha_{li} = \frac{\partial y_l}{\partial x_i}(x_0)$. Тогда (5) в точке x_0

$$\tilde{a}_{kl}(y_0) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) \cdot \alpha_{ki} \cdot \alpha_{lj}. \tag{7}$$

Полученная формула преобразования коэффициентов a_{ij} в точке x_0 совпадает с формулой преобразования коэффициентов квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) \cdot p_i \cdot p_j \tag{8}$$

при невырожденном линейном преобразовании

$$p_i = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{li} q_l, \quad det\{\alpha_{li}\} \neq 0, \tag{9}$$

которое переводит (8) в форму

$$\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{a}_{kl}(y_0) \cdot q_k \cdot q_l. \tag{10}$$

Значит, чтобы упростить уравнение (1) в точке x_0 с помощью замены переменной (2), достаточно упростить в этой точке квадратичную форму (8) с помощью невырожденного линейного преобразования (9).

Из курса линейной алгебры вы знаете, что всегда существует обратимое линейное преобразование (9), при котором квадратичная форма (10) принимает следующий канонический вид:

$$\sum_{l=1}^{r} q_l^2 - \sum_{l=r+1}^{m} q_l^2, \quad 0 \leqslant r \leqslant m, \quad m \leqslant n. \tag{11}$$

Кроме того, по закону инерции квадратичных форм целые числа r и m не зависят от линейного преобразования. Это позволяет классифицировать ДУ в точке x_0 в зависимости от значения коэффициентов в этой точке.

Уравнение имеет:

1) эллиптический тип в точке x_0, если в каноническом виде квадратичной формы все коэффициенты одного знака, т.е., $m = n$, $r = n$ или $r = 0$.
Пример: уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0$.

2) гиперболический тип в точке x_0, если в каноническом виде в квадратичной форме n-1 коэффициент одного знака, а один - противоположного, т.е., $m = n$, $r = 1$ или $r = n - 1$.
Примеры: уравнения упругих колебаний струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$,
волновое уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$.

3) параболический тип в точке x_0, если в каноническом виде в квадратичной форме n-1 коэффициент одного знака, а один - нулевой, т.е., $m = n - 1$, $r = 0$ или $r = n - 1$.
Пример: уравнение теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$.

4) ультрагиперболический тип в точке x_0, если в каноническом виде в квадратичной форме $2 \leqslant r \leqslant n - 2$, т.е., не менее двух членов одного знака.
Пример: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} = 0$ (такие уравнения мы не будем изучать).

Заметим, что предложенная классификация зависит от точки. Например, уравнение Трикоми:

$$x_2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

имеет гиперболический тип при $x_2 < 0$, эллиптический тип при $x_2 > 0$ и параболический тип при $x_2 = 0$.

О классификации ДУ в области можно говорить, если оно сохраняет свой тип в каждой точке $x_0 \in \Omega$. Например, если в каждой точке ДУ имеет эллиптический тип, то оно эллиптическое (в этом случае матрица $\{a_{ij}(x)\}$ положительно определена).

Наконец, если коэффициенты a_{ij} в ДУ постоянны, то подходящая линейная замена независимой переменной $y_l = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{l\,i} x_i$, $l = 1, ..., n$ преобразует уравнение (1) к следующему каноническому виду:

$$\sum_{l=1}^{r} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l^2} - \sum_{l=r+1}^{m} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l^2} + \tilde{\Phi}(y, \tilde{u}, \nabla \tilde{u}) = 0.$$

§3. Характеристические поверхности (характеристики)

Пусть задана функция $\omega(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $n \geqslant 2$ из класса C^1 такая, что на поверхности $\omega(x) = 0$, $\nabla\omega(x) \neq 0$ и

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \cdot \frac{\partial\omega(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial\omega(x)}{\partial x_j} = 0. \tag{12}$$

Тогда поверхность $\omega(x)$ называется *характеристической поверхностью* (или *характеристикой*) квазилинейного ДУ (1), а уравнение (12) называют уравнением характеристик. При $n = 2$ говорят о *характеристических линиях.*

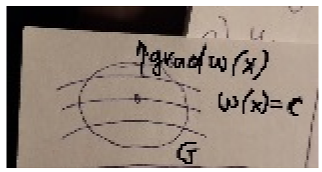

Рис. 2:

Предположим, что каждая поверхность семейства $\omega(x) - C = 0$, $a < c < b$ есть характеристика ДУ (1). Поскольку на каждой характеристике $\nabla\omega(x) \neq 0$, то это семейство заполняет некоторую достаточно малую область G, через каждую точку которой проходит лишь одна характеристика.

Пусть $\omega \in C^2(G)$. Тогда если в преобразовании координат взять $y_1 = \omega(x)$, то в силу (5) и (12) коэффициент $\tilde{a}_{11}$ обратится в нуль на $\tilde{G}$. Поэтому знание одного или нескольких семейств характеристик позволяет привести уравнение к более простому виду.

Примеры характеристик.

а) Волновое уравнение. Его характеристическое уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 - a^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2 = 0.$$

Поверхность $a^2(t - t_0)^2 - |x - x_0|^2 = 0$ называется характеристическим конусом с вершиной в точке (t_0, x_0). Это характеристика, т.к.,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 2a^2(t - t_0), \quad \frac{\partial w}{\partial x_i} = 2(x_i - x_{0_i}).$$

Подставим:

$$4a^4(t - t_0)^2 - a^2 \sum_{i=1}^{n} 4(x_i - x_{0_i})^2 = 4a^2 \left(a^2(t - t_0) - \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i_0})^2 \right).$$

Другие характеристики получаются из семейства касательных к характеристическому конусу: $at + (x, b) = C$, где $b = (b_1, \ldots, b_n)$, C любое число, причем $|b| = 1$.

b) Уравнение теплопроводности. Его характеристиками, очевидно, является семейство гиперплоскостей $t = C$.

c) Уравнение Пуассона. Оно не имеет (вещественных) характеристик, т.к., из уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right)^2 = 0$$

следует, что $\nabla \omega = 0$ на $\omega = 0$, что невозможно в силу требуемого условия.

Лекция 3. Постановка основных краевых задач

§1. Классификация краевых задач

Как было показано в первой лекции, линейное уравнение 2-го порядка

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \nabla u) - q \cdot u + F(x, t) \tag{1}$$

описывает процессы колебания, уравнение

$$\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \nabla u) - q \cdot u + F(x, t) \tag{2}$$

описывает процессы диффузии, и, наконец, уравнение

$$-\operatorname{div}(p \nabla u) + q \cdot u = F(x) \tag{3}$$

описывает соответствующие стационарные процессы.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – область, где протекает процесс, S – граница области G, которую будем считать кусочно-гладкой поверхностью. Значит, G – область изменения аргумента x в уравнении (3), т.е., область задания этого уравнения.

Областью задания уравнений (1) и (2) будет цилиндр $\Pi_T = G \times (0, T)$ высоты T с основанием G. Его граница состоит из боковой поверхности $S \times [0, T]$ и двух оснований: нижнего $\bar{G} \times \{0\}$ и верхнего $\bar{G} \times \{T\}$. Будем предполагать, что коэффициенты ρ, p, q в уравнениях (1)-(3) не зависят от времени t.

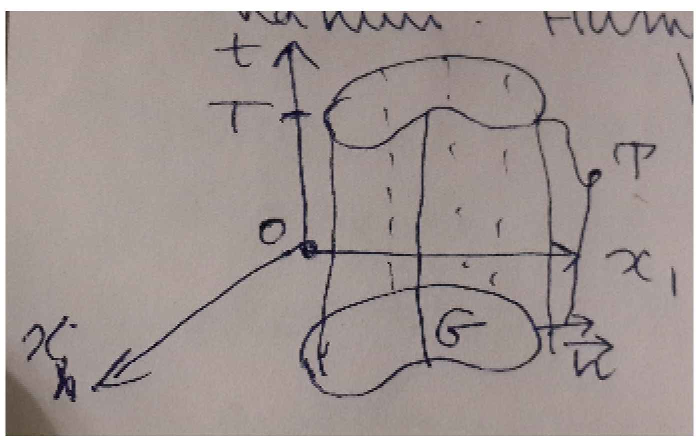

Рис. 3:

Далее, в соответствии с физическим смыслом этих величин будем считать, что $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$, $x \in \bar{G}$. Наконец, в соответствии с математическим смыслом, необходимо считать, что $\rho \in C(\bar{G})$, $p \in C^1(\bar{G})$, $q \in C(\bar{G})$. При этих предположениях, согласно нашей классификации, уравнение колебаний (1) – гиперболического типа, уравнение диффузии (2) – параболического типа, а уравнение (3) имеет эллиптический тип. Таким образом, различие типов этих уравнений тесно связано с различием физических процессов, которые они описывают.

Чтобы полностью описать тот или иной физический процесс, кроме уравнения, необходимо еще задать начальное состояние этого процесса (*начальные условия*) и режим на границе области, в которой происходит процесс (*граничные условия*). Математически это связано с неединственностью решения ДУ. Действительно, как вы знаете, даже для ОДУ n-го порядка общее решение зависит от n произвольных постоянных. А для УрЧП решение в общем случае зависит от произвольных функций.

Например, общее решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0$, где $G = (0,1) \times (0,1)$, имеет вид $u(x,y) = f(y)$, где $f(y)$ – произвольная функция класса $C^1([0,1])$.

Поэтому, чтобы выделить решение, описывающее реальный физический процесс, необходимо задать дополнительные условия. Такими дополнительными условиями и являются *краевые условия*: начальные условия и граничные условия. Соответствующая задача называется *краевой задачей*.

Различают три типа краевых задач для ДУ.

а) Задача Коши для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются начальные условия, область G совпадает со всем пространством: $G = \mathbb{R}^n$, граничные условия отсутствуют.

b) Краевая задача для уравнений эллиптического типа: заданы граничные условия на границе S, начальные условия отсутствуют.

c) Смешанная задача для уравнений гиперболического и параболического типа: заданы и начальные, и граничные условия, $G \neq \mathbb{R}^n$.

Опишем подробнее постановку каждой из перечисленных краевых задач.

§2. Задача Коши

Для уравнения колебаний (1) (гиперболический тип) задача Коши ставится следующим образом: найти функцию $u(x,t)$ класса $C^2(t>0) \cap C^1(t \geqslant 0)$, удовлетворяющую уравнению (1) в полупространстве $\{t>0\}$ и начальным условиям при $t=+0$:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

При этом необходимо, чтобы $F \in C(t>0)$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in C(\mathbb{R}^n)$.

Для уравнения диффузии (2) (параболический тип) задача Коши ставится так: найти функцию $u(x,t)$ класса $C^2(t>0) \cap C(t \geqslant 0)$, удовлетворяющую уравнению (2) в полупространстве $\{t>0\}$ и начальному условию при $t=+0$:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

При этом необходимо, чтобы $F \in C(t>0)$, $u_0(x) \in C(\mathbb{R}^n)$.

§3. Краевая задача для уравнений эллиптического типа

Задача состоит в нахождении функции $u(x)$ класса $C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$, удовлетворяющей в области G уравнению (3) и граничному условию на S вида:

$$\alpha \cdot u + \beta \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \,|_S = v, \tag{6}$$

где α, β и v – заданные непрерывные функции на S, причем $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta > 0$. Выделяют следующие типы граничных условий (6).

- **Граничные условия первого рода** ($\alpha = 1, \beta = 0$):

$$u \mid_S = u_0(x). \tag{7}$$

- **Граничные условия второго рода** ($\alpha = 0, \beta = 1$):

$$\frac{\partial u}{\partial n} \mid_S = u_1(x). \tag{8}$$

- **Граничные условия третьего рода** ($\alpha \geqslant 0, \beta = 1$):

$$\alpha \cdot u + \frac{\partial u}{\partial n} \mid_S = u_2(x). \tag{9}$$

Соответствующие краевые задачи называются краевыми задачами первого, второго или третьего рода.

Для уравнений Лапласа и Пуассона краевая задача первого рода:

$$\Delta u = -f, \quad u \mid_S = u_0 \tag{10}$$

называется задачей Дирихле, а краевая задача второго рода

$$\Delta u = -f, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \mid_S = u_1 \tag{11}$$

называется задачей Неймана.

§4. Смешанная задача

Для уравнения колебаний (гиперболический тип) смешанная задача ставится следующим образом: найти функцию $u(x,t)$ класса $C^2(\Pi_T) \cap C^1(\bar{\Pi}_T)$, удовлетворяющую уравнению (1) в цилиндре Π_T, начальным условиям (4) при $t = 0, x \in \bar{G}$ (на нижнем основании цилиндра) и граничному условию

$$\alpha \cdot u + \beta \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \mid_S = v \tag{12}$$

(на боковой поверхности цилиндра). При этом должны выполняться условия гладкости $F \in C(\Pi_T)$, $u_0 \in C^1(\bar{G})$, $u_1 \in C(\bar{G})$, $v \in C([S \times [0,T])$ и *условия согласования*:

$$\alpha \cdot u_0 + \beta \cdot \frac{\partial u_0}{\partial n} \mid_S = v(x,0). \tag{13}$$

Аналогично для уравнения диффузии (2) (параболический тип) смешанная задача ставится так: найти функцию $u(x,t)$ класса $C^2(\Pi_T) \cap C(\bar{\Pi}_T)$, $\nabla_x u \in C(\bar{\Pi}_T)$ которая удовлетворяет уравнению (2) в цилиндре Π_T, начальному условию (5) при $t = 0, x \in \bar{G}$ и граничному условию (12). При этом необходимо выполнение условий $F \in C(\Pi_T)$, $u_0 \in C^1(\bar{G})$, $u_1 \in C(\bar{G})$, $v \in C([S \times [0,T])$, а также выполнение условия согласованности (13).

§5. Корректность постановки задач для УрЧП

Поскольку УрЧП описывают реальные физические процессы, то постановки задач для них должны удовлетворять следующим требованиям.

a) Решение должно существовать в некотором классе функций $\mathcal{M}$;

b) Решение должно быть единственным в этом классе функций $\mathcal{M}$;

c) Решение должно непрерывно зависеть от исходных данных задачи (начальных и граничных данных, коэффициентов, свободных членов и т.п.)

Непрерывная зависимость решения u от данных задачи φ означает следующее: пусть последовательность данных $\varphi_k, k = 1, 2, \ldots$ в каком-то смысле стремится к функции φ и пусть u_k в пространстве Φ – соответствующие решения этой задачи с данными φ_k, тогда должно быть: $u_k \to u$ $(k \to \infty)$ в смысле выбранной сходимости в пространстве $\mathcal{M}$, где u – решение задачи с данными $\varphi \in \Phi$. Обычно $\mathcal{M}$ и Φ – полные метрические пространства.

Требование непрерывной зависимости обусловлено тем обстоятельством, что физические данные, как правило, определяются из экспериментов лишь приближенно, и поэтому нужно быть уверенным в том, что малые ошибки в данных не повлияют существенно на решение задачи.

Задача для УрЧП, которая удовлетворяет перечисленным требованиям, называется *корректно поставленной* (по Адамару), а множество $\mathcal{M}$ называется классом корректности. Если задача не удовлетворяет одному из условий a), b), c), то она называется некорректно поставленной.

Пример. В теории ОДУ доказывается, что задача Коши для ОДУ первого порядка

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad u(t_0) = u_0, \quad u_0 \in \mathbb{R},$$

поставлена корректно, если функция $f(t, u)$ непрерывна по (t, u) и удовлетворяет условию Липшица по u в некоторой окрестности точки (t_0, u_0). Класс корректности $\mathcal{M} = \{u(t) \in C^1([t_0 - \delta, t_0 + \delta])\}$, где δ – некоторое малое число (зависит от f, t_0, u_0).

В нашем курсе мы будем устанавливать корректность основных краевых задач для линейных уравнений второго порядка, а также изучать свойства решений и методы их построения.

Обсудим корректность по Адамару применительно к линейному уравнению. Пусть требуется решить задачу:

$$Au = \varphi, \tag{1}$$

где A – некоторый линейный оператор, действующий из пространства $\mathcal{M}$ в пространство Φ. При этом оператор A включает дифференциальный оператор в левой части уравнения с частными производными, а также начальное и граничное условие, т.е., $Au = (f, u|_{t=0} = u_0, u|_{x\in S} = v, \ldots)$. Предполагается, что $\mathcal{M}$ и Φ – банаховы пространства, т.е., это полные нормированные линейные пространства. Что означает корректность задачи (1)?

Теорема 1 *Задача (1) корректно поставлена в паре пространств* $(\mathcal{M}, \Phi)$ *тогда и только тогда, когда оператор* A *– обратим, т.е., существует оператор* $A^{-1}\colon \Phi \to \mathcal{M}$, $A^{-1}A = E_{\mathcal{M}}$, $AA^{-1} = E_{\Phi}$, *причем оператор* A^{-1} *ограничен.* (*Здесь* $E_{\mathcal{M}}$ *и* E_{Φ} *обозначают тождественные операторы в* $\mathcal{M}$ *и* Φ*, соответственно.*)

Доказательство.

$\Rightarrow$ (Необходимость). Если задача корректно поставлена, то, прежде всего, ее решение u существует при любом $\varphi \in \Phi$ и единственно. Это означает существование оператора A^{-1}, и его область определения – все Φ. Далее, заменим элемент φ в (1) на $\varphi + \psi$. Пусть решение будет $w = u + v$, т.е., $A(u + v) = \varphi + \psi$. Поскольку φ есть решение и оператор A – линейный, то с учетом (1) и (2) получаем

$$Av = \psi. \tag{2}$$

Задача (1) корректна, поэтому, если задано $\epsilon > 0$, то можно найти $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, что при $\|\psi\|_{\Phi} < \delta$ будет $\|v\|_{\mathcal{M}} < \epsilon$. Зафиксируем как ϵ, так и соответствующее δ. Если $\psi \in \Phi$, $\|\psi\|_{\mathcal{M}} \leqslant 1$, то $\|\frac{\delta}{2}\psi\|_{\Phi} = \frac{\delta}{2} \leqslant \delta$ и, следовательно, $\|A^{-1}\frac{\delta}{2}\psi\|_{M} \leqslant \epsilon$, т.е. $\|A^{-1}\psi\|_{M} \leqslant \frac{2\epsilon}{\delta}$ при любом ψ, $\|\psi\|_{\Phi} \leqslant 1$, т.е., $\|A^{-1}\| \leqslant \frac{2\epsilon}{\delta}$, и, значит, оператор A^{-1} ограничен.
$\Leftarrow$ (Достаточность). Если оператор A^{-1} существует, то задача (1) имеет ровно одно решение при любом $\varphi \in \Phi$. Наконец, если оператор A^{-1} ограничен, и $\|\varphi\|_{\Phi} \leqslant \delta$, то в (1) берем $u = A^{-1}\varphi$ и получаем

$$\|u\|_{\mathcal{M}} = \|A^{-1}\varphi\|_{\mathcal{M}} \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|\varphi\|_{\Phi} \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \delta \leqslant \epsilon$$

если выбрать $\delta = \frac{\epsilon}{\|A^{-1}\|}$, т.е., получается непрерывная зависимость решения.

Важно подчеркнуть, что корректность и некорректность конкретной задачи зависит оттого, в каких пространствах M и Φ она ставится. Одна и та же задача может быть корректной в одной паре пространств и некорректной в другой.

Лекция 4

§1. Теорема Коши-Ковалевской

Рассмотрим задачу Коши для системы ОДУ следующего вида:

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(t,u), \quad t \geqslant t_0, \quad u_i(t_0) = u_{i_0}, \quad i = 1, \dots, N. \tag{1}$$

Первое доказательство существования и единственности решения задачи (1) было получено Коши в классе аналитический функций f_i в окрестности точки (t_0, u_0). Напомним, что функция $f(x)$, $x = (x_1, ..., x_n)$ называется *аналитической в точке* x_0, если в некоторой окрестности этой точки она представима в виде равномерно сходящегося степенного ряда:

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \geqslant 0} c_\alpha \cdot (x - x_0)^\alpha = \sum_{|\alpha| \geqslant 0} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} \cdot (x - x_0)^\alpha$$

(точка x_0 может быть комплексной). Здесь обозначено: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $\alpha_i \in Z_+$, $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $\alpha! := \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$,

$$(x - x_0)^\alpha := \prod_{i=1}^n (x_i - x_{i_0})^{\alpha_i}, \quad D^\alpha f(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Если функция $f(x)$ является аналитической в каждой точке $x \in G$ области G, то она называется *аналитической в области* G.

Теорема Коши была обобщена Софьей Ковалевской на случай уравнений в частных производных. Эта теорема относится к следующему классу уравнений, который принято называть *уравнениями типа Ковалевской*:

$$\frac{\partial^{k_i} u_i}{\partial t^{k_i}} = f_i(t, x, u_1, u_2, \dots, u_n; D_t^{\alpha_0} D_x^\alpha u_j; \dots) \quad i = 1, 2, ..., N, \tag{2}$$

Здесь $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Неизвестные $u_1, ..., u_N$. Предполагается, что функция $f_i(\cdot)$ не зависит от производных u_j порядка выше k_i по (t, x) и порядка выше $k_i - 1$ по t, т.е.,

$$\alpha_0 + |\alpha| \leqslant k_i, \quad \alpha_0 \leqslant k_i - 1, \quad i = 1, ..., N. \tag{3}$$

Например, волновое уравнение и эллиптическое уравнение имеют тип Ковалевской, а параболическое уравнение – нет (относительно t, относительно x – оно типа Ковалевской).

Задача Коши для системы (2): найти функции $u_1(t,x), \dots, u_N(t,x)$ системы (2), которое при $t = t_0$ удовлетворяет начальным условиям:

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k}\Big|_{t=t_0} = \varphi_{i_k}(x), \quad k = 0, 1, \dots, k_i - 1, \quad i = 1, 2, \dots, N, \tag{4}$$

где $\varphi_{i_k}(x)$ – заданные функции в области $G \subset R^n$.

Теорема Коши-Ковалевской. *Если все функции $\varphi_{i_k}(x)$ являются аналитическими в некоторой окрестности точки x_0 и все функции $f_i(t, x, \dots, u_{j\alpha_0\alpha}, \dots)$ также аналитичны в некоторой окрестности точки $(t_0, x_0, \dots, D^\alpha \varphi_{j\alpha_0}(x_0), \dots)$, то задача (2), (4) имеет аналитическое решение в окрестности точки (t_0, x_0), которое единственно в классе аналитических функций.*

При доказательстве этой теоремы решение $u_1, u_2, \dots, u_n$ в окрестности точки (t_0, x_0) ищется в виде степенных рядов:

$$u_i(t, x) = \sum_{\alpha_0 \geqslant 0, |\alpha| \geqslant 0} \frac{D_t^{\alpha_0} D_x^\alpha u_i(t_0, x_0)}{\alpha_0! \cdot \alpha!} \cdot (t - t_0)^{\alpha_0} \cdot (x - x_0)^\alpha. \tag{5}$$

Из начальных условий (4) и из уравнения (2) последовательно определяются все производные $D_t^{\alpha_0} D_x^\alpha u_i(t_0, x_0)$ в точке (x_0, t_0). Здесь используется условие Ковалевской (3) о порядке производных в правой части (2). Равномерная сходимость рядов (5) и всех их производных доказывается методом мажорант. Единственность решения следует из теоремы единственности для аналитических функций.

§2. Пример Адамара

Теорема Коши-Ковалевской не решает полностью вопрос о корректности системы Ковалевской. Во-первых, это решение в малом по t и по x, а мы хотим иметь в целом, например, по времени. Во-вторых, если какая-то функция f_i или φ_{i_k} не является аналитической, то решение не известно. Наконец, может не быть непрерывной зависимости решения от начальных данных задачи. Последнее обстоятельство иллюстрирует следующий пример Адамара.

Рассмотрим уравнение Лапласа ($n = 1$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6}$$

с начальными данными при $t = 0$:

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \frac{1}{k} \cdot \sin kx. \tag{7}$$

Решение задачи (6), (7) есть

$$u_k(t, x) = \frac{sh(kt)}{k^2} \cdot \sin(kx) = \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2} \cdot \sin(kx).$$

Отметим, что при $k \to \infty$ начальные данные

$$\frac{1}{k} \sin(kx) \rightrightarrows 0 \quad \text{(равномерно по } x\text{)}.$$

Тем не менее, при $t > 0$ и $x \neq j \cdot \pi$, $j = 0, \pm 1; \pm 2; \dots$

$$u_k(t, x) = \frac{sh(kt)}{k^2} \sin(kx) \nrightarrow 0 \quad (k \to \infty).$$

Проверим, что $u_k(t,x)$ – решение задачи (6), (7):

$$\frac{\partial}{\partial t} sh(kt) = k \cdot ch(kt) = k \cdot \frac{e^{kt}+e^{-kt}}{2}, \quad \frac{\partial}{\partial t} u_k(t,x) = k \cdot ch(kt) \cdot sin(kx).$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} sh(kt) = k^2 \cdot sh(kt), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} sin(kx) = -k^2 \cdot sin(kx).$$

Значит,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_k(t,x) = k^2 u_k(t,x), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_k(t,x) = -k^2 u_k(t,x).$$

Сложив эти равенства получим требуемое уравнение (6):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_k(t,x) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_k(t,x).$$

Проверим выполнение начальных условий (7):

$$u_k(t,x)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u_k(t,x)|_{t=0} = \frac{\sin(kx)}{k}.$$

§3. Уравнение колебания струны и его решение методом Даламбера

Формула Даламбера. Изучение методов построения решений краевых задач для уравнений гиперболического типа мы начнем с задачи Коши для уравнения свободных колебаний струны.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x). \tag{2}$$

Здесь $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные функции. Будем предполагать, что $u(x,t)$ – дважды непрерывно дифференцируема по x и t: $u \in C^2(t \geqslant 0)$. Преобразуем уравнение (1) к каноническому виду, содержащему смешанную производную. Уравнение характеристик:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 - a^2 = 0$$

распадается на два уравнения: $\frac{\partial x}{\partial t} = a$ и $\frac{\partial x}{\partial t} = -a$, которые имеют первые интегралы:

$$x - at = C_1 \text{ и } x + at = C_2.$$

Делаем замену переменных: $\xi = x + at, \eta = x - at$ и преобразуем уравнение (1) к виду:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \tag{3}$$

где $\tilde{u}(\xi,\eta) = u(t(\xi,\eta), x(\xi,\eta))$. Легко видеть, что любое решение уравнения (3) дается формулой

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

где $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$ – произвольные функции класса C^2. Возвращаясь к переменным (t,x), получаем формулу для $u(x,t)$:

$$u = f_1(x+at) + f_2(x-at). \tag{4}$$

Это общее решение уравнения свободных колебаний струны. Мы доказали теорему:

Теорема 1 *Любое решение $u(x,t)$ уравнения (1) класса $C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ имеет вид (4). Обратно, для любых функций $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ класса $C^2(\mathbb{R})$ функция $u(x,t)$, заданная формулой (4), является решением уравнения (1) класса $C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.*

Обратное утверждение проверяется непосредственно подстановкой формулы (4) в уравнение.

Подставим теперь в (4) начальные условия (2). Имеем при $t=0$:

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \tag{5}$$

$$af_1'(x) - f_2'(x) = \psi(x). \tag{6}$$

Интегрируем второе уравнение (6) и находим:

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\cdot\int_{x_0}^{x}\psi(y)dy + C, \tag{7}$$

где x_0 и C – некоторые постоянные. Из формул (5) и (7) находим:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x) + \frac{1}{a}\cdot\int_{x_0}^{x}\psi(y)dy + C\right],$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x) - \frac{1}{a}\cdot\int_{x_0}^{x}\psi(y)dy - C\right].$$

Подставляем эти выражения в (4), имеем:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + \frac{1}{a}\cdot\int_{x_0}^{x+at}\psi(y)dy + C + \varphi(x-at) - \frac{1}{a}\cdot\int_{x_0}^{x-at}\psi(y)dy - C\right]$$

Получаем окончательное выражение:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) - \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)dy. \tag{8}$$

Эта формула называется *формулой Даламбера*.

Мы доказали теорему единственности решения задачи Коши (1), (2). Действительно, предположив существование такого решения $u\in C^2$, мы однозначно получили формулу (8). (На самом деле, достаточно: $\varphi\in C^2(R)$, $\Psi\in C^1(R)$).

Для доказательства существования решения при заданных $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ нужно убедиться в том, что функция $u(x,t)$, определенная по формуле (8), принадлежит классу C^2, удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (2). Это делается прямой подстановкой. В итоге мы доказали теорему существования и единственности решения задачи (1), (2) в классе C^2.

Покажем, что решение непрерывно зависит от начальных данных φ и ψ при разумном выборе топологии в пространстве начальных данных φ и ψ и функций $u(x,t)$.

Ясно, что если решение $u_1(x,t)$ построено по начальным данным φ_1 и ψ_1, причем при достаточно малом $\delta > 0$ выполнены неравенства:

$$\sup_{x\in R}|\varphi_1(x)-\varphi(x)|<\delta, \quad \sup_{x\in R}|\psi_1(x)-\psi(x)|<\delta, \tag{9}$$

то при фиксированном $T>0$

$$\sup_{x\in R, t\in[0,T]}|u_1(x,t)-u(x,t)|<\varepsilon \tag{10}$$

для сколь угодно малого ε. (Легко проверить, что годится $\delta=\frac{\varepsilon}{T+1}$).

Дадим точную формулировку результата.

Теорема 2 *Для любого $\varepsilon>0$ и любого $T>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon,T)$ такое, что из (9) следует (10).*

Следовательно, задача Коши (1), (2) корректна по Адамару в классе решений из C^2 с топологией пространства C,

$$\mathcal{M}=C(\mathbb{R}_+\times[0,T]), \quad \Phi=C(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+;\mathbb{R}).$$

Лекция 5

§1. Геометрическая интерпретация формулы Даламбера. Конечная область зависимости решения от начальных данных. Конечная скорость распространения возмущений

Продолжим изучение формулы Даламбера. Пусть (x_0, t_0) – фиксированная точка на плоскости (x, t). Тогда значение решения уравнения струны в этой точке равно

$$u(x_0, t_0) == \frac{u(x_0 + at, 0) + u(x_0 - at, 0)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x_0 - at}^{x_0 + at} \frac{\partial u}{\partial t}(y, 0) dy.$$

Отметим на оси x точки $x_0 - at$, $x_0 + at$ и соединим их отрезками с точкой (x_0, t_0). Уравнения прямых, на которых лежат эти отрезки имеют вид

$$x - at = const, \quad x + at = const.$$

Легко видеть, что эти прямые являются характеристиками уравнения свободных колебаний струны. Из формулы Даламбера заключаем, что значение решения в точке (x_0, t_0) зависит только от значений начальных функций на отрезке $[x_0 - at, x_0 + at]$, который отсекается от оси абсцисс x характеристиками, проходящими через точку (x_0, t_0). Значения начальных функций вне этого отрезка никак не влияют на решение в точке (x_0, t_0). В этом состоит конечность области зависимости решения от начальных данных.

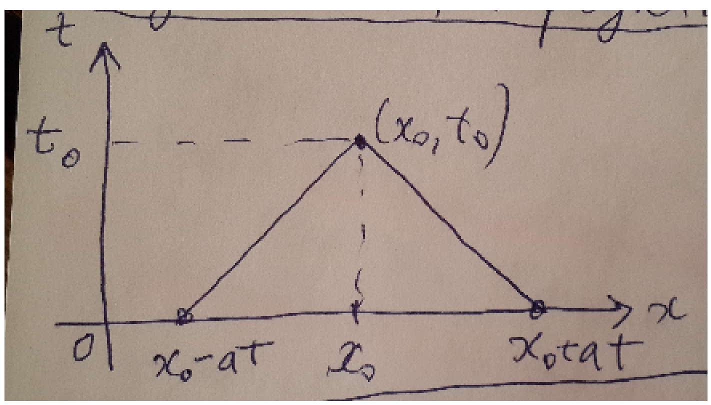

Рис. 4:

Подойдем к формуле Даламбера с другой стороны. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ отличаются от нуля лишь на отрезке $[x_1 - \delta, x_1 + \delta]$, т.е., имеется малое возмущение положения покоя. Вопрос: где в полуплоскости $\{(x, t), t \geqslant 0\}$ решение будет отлично от нуля? Из формулы Даламбера вытекает, что решение тождественно равно нулю правее характеристики $x - x_1 - \delta - at = 0$ и левее характеристики $x - x_1 + \delta + at = 0$. Другими словами, возмущение распространяется вдоль характеристик со скоростью a. Это означает конечность скорости распространения возмущений.

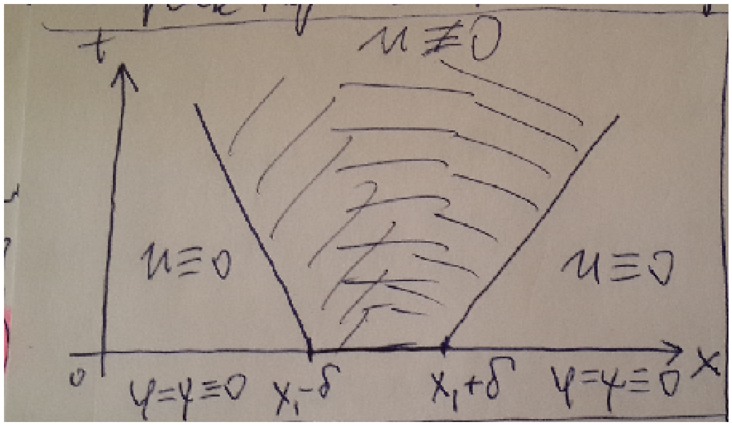

Рис. 5:

Наконец, имеется еще одна важная интерпретация общего решения уравнения струны

$$u(x,t) = f_1(x-at) + f_2(x+at).$$

Функция $f_1(x-at)$ обозначает волну, которая бежит по оси x вправо со скоростью a. Функция $f_2(x+at)$ - такая же бегущая волна влево со скоростью a. Следовательно, любое решение – это сумма двух волн, бегущих в разные стороны со скоростью a.

§2. Неоднородное уравнение колебаний струны

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения колебаний струны. Нам задана функция $f(x,t) \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x\in\mathbb{R},\ t\geqslant 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Легко проверить, что решение задачи (1), (2) представимо в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \tag{3}$$

где $v(x,t)$ – решение задачи Коши (1), (2) с данными $\varphi, \psi, f\equiv 0$ (уравнение свободных колебаний), а функция $w(x,t)$ является решением задачи Коши (1), (2) с данными $\varphi\equiv 0, \psi\equiv 0, f(x,t)$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t),\\ &w(x,0) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Функция $v(x,t)$ строится по формуле Даламбера, а решение задачи (4) находится по формуле

$$w(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t+\tau)} f(\xi,\tau)d\xi\right]d\tau. \tag{5}$$

Вывод формулы (5) мы сделаем позже для общего волнового уравнения, а пока просто убедимся, что эта формула задает решение задачи (4).

Действительно, условие $w(x,0) \equiv 0$, очевидно, выполнено. Находим частные производные по t и по x

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0 + \frac{1}{2a}\int_0^t \left[af(x+a(t-\tau),\tau) + af(x-a(t-\tau),\tau)\right] d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x,t) + \frac{a}{2}\int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x+a(t-\tau),\tau) - \frac{\partial f}{\partial x}(x-a(t-\tau),\tau)\right] d\tau,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2a}\int_0^t \left[f(x+a(t-\tau),\tau) - f(x-a(t-\tau),\tau)\right] d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{2a}\int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x+a(t-\tau),\tau) - \frac{\partial f}{\partial x}(x-a(t-\tau),\tau)\right] d\tau.$$

Из этих выражений заключаем, что

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(x,t).$$

Формула (5) может показаться какой-то искусственной, однако у нее есть прозрачное обоснование с помощью принципа Дюамеля, с которым мы познакомимся позже.

Мы доказали теорему существования для решения неоднородной задачи (1), (2) при условии, что $f \in C^1$. Единственность, как всегда в линейных задачах, достаточно доказать для однородной задачи при $f \equiv 0$. Мы это уже сделали на прошлой лекции.

§3. Случай полуограниченной струны

Требуется решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \geqslant 0, \quad t \geqslant 0 \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad x \geqslant 0. \tag{2}$$

Необходимо еще задать какие-то условия на конце струны при $x = 0$ для всех $t \geqslant 0$. Сначала рассмотрим условие, отвечающее закрепленной струне:

$$u(0,t) = 0. \tag{3}$$

В этом случае следует продолжить начальные функции φ и ψ на всю ось $\{x \in \mathbb{R}\}$ нечетным образом:

$$\varphi(-x) = -\varphi(x), \quad \psi(-x) = -\psi(x).$$

После чего решаем начальную задачу на всей оси, используя формулу Даламбера. Построенное решение будет, очевидно, удовлетворять краевому условию!

При $x > at$ решение не зависит от краевого условия (3) и дается формулой Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)dy.$$

А при $0 < x \leqslant at$ в силу нечетности продолжения функций φ и ψ, после очевидных преобразований, получаем формулу

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(y)dy.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что эта функция удовлетворяет уравнению (1), начальным условиям (2) и граничным условиям (3), если дополнительно потребовать, что

$$\varphi \in C^2(\mathbb{R}_+), \quad \psi \in C^1(\mathbb{R}_+), \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 0, \quad \psi(0) = 0.$$

Тогда при нечетном продолжении получим $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$.

Пусть теперь на границе задано другое условие

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0. \tag{4}$$

Следует продолжить φ и ψ на всю ось четным образом. Тогда по формуле Даламбера при любом $t > 0$ решение $u(x,t)$ будет четно, и поэтому $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$, т.е., граничное условие будет выполнено.

Опять, при $x > at$ решение не зависит от граничного условия, а при $x < at$ получаем формулу

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(y)dy + \frac{1}{a}\int_{0}^{at-x}\psi(y)dy.$$

Условия для сохранения гладкости при четном продолжении имеют вид:

$$\varphi \in C^2(\mathbb{R}_+), \quad \psi \in C^1(\mathbb{R}_+), \quad \varphi'(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0.$$

Физический смысл условия (4): струна со свободным концом (конечно, без трения).

Осталось решить вопрос о единственности решения задачи (1), (2), (3) и задачи (1), (2), (4).

Отметим, что для любого решения уравнения (1) в области $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ = G$ по-прежнему справедливо его представление в виде суммы двух бегущих волн. Оно, очевидно, верно для любой выпуклой области $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$u(x,t) = f_1(x-at) + f_2(x+at), \tag{5}$$

где f_1 и f_2 – некоторые функции из $C^2(\mathbb{R})$.

Покажем, что если в задаче (1), (2), (3) начальные данные φ и ψ равны нулю при $x \geqslant 0$, то $u(x,t) \equiv 0$ при всех $x \geqslant 0, t \geqslant 0$. Воспользуемся представлением (5) при $t = 0$:

$$f_1(x) + f_2(x) = 0 \quad \text{при } x \geqslant 0,$$

$$-f_1'(x) + f_2'(x) = 0 \quad \text{при } x \geqslant 0.$$

Следовательно, $-f_1(x) + f_2(x) = C$ при $x \geqslant 0$, т.е., $f_2(x) = \frac{C}{2}$, $f_1(x) = -\frac{C}{2}$ при $x \geqslant 0$. Воспользуемся (5) и граничным условием (3), т.е., $u(0,t) = 0$ при $t \geqslant 0$:

$$f_1(-at) + f_2(at) = 0.$$

Следовательно, при всех $x < 0$

$$f_1(x) = -f_2(x) = -\frac{C}{2}.$$

Поэтому из (5) получаем

$$u(x,t) = -\frac{C}{2} + \frac{C}{2} = 0 \quad \text{при } x \geqslant 0, t \geqslant 0.$$

Аналогично доказывается единственность решения для задачи (1), (2), (4).

Лекция 6

§1. Первая краевая задача (смешанная задача) для однородного уравнения струны. Метод разделения переменных. Построение классического решения

Рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{3}$$

Такая задача называется первой краевой задачей (или смешанной задачей). Будем ее решать методом разделения переменных (методом Фурье), не уточняя пока условий, налагаемых на функции φ и ψ.

1. Первый шаг состоит в том, что разделяются переменные, т.е. мы ищем решение уравнения (1) (не равное тождественно нулю) в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит лишь от одной независимой переменной:

$$u(x,t) = Y(x) \cdot Z(t). \tag{4}$$

После подстановки в (1) получаем равенство

$$Z''(t) \cdot Y(x) = a^2 \cdot Y''(x) \cdot Z(t),$$
$$\frac{Z''(t)}{a^2 Z(t)} = \frac{Y''(x)}{Y(x)}.$$

Так как левая часть этого равенства не зависит от x, а правая – от t, то, следовательно, обе они равны постоянной λ:

$$\frac{Z''(t)}{a^2 Z(t)} = \frac{Y''(x)}{Y(x)} = \lambda$$

Таким образом, функции Z и Y должны удовлетворять уравнениям $Y''(x) = \lambda Y(x)$, $Z''(t) = a^2\lambda \cdot Z(t)$. Решив эти два уравнения и перемножив их решения, получим решениelf $Y(x)Z(t)$ для (1).

2. Второй шаг состоит в том, что построенное решение должно удовлетворять однородным граничным условиям:

$$Y(0)Z(t) = 0 \quad \forall t \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad Y(0) = 0$$

(т.к. $Z(t)$ не равно нулю тождественно). Аналогично,

$$Y(l)Z(t) = 0 \quad \forall t \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad Y(l) = 0.$$

Следовательно, функция $Y(x)$ должна удовлетворять следующему уравнению и граничным условиям:

$$Y''(x) = \lambda Y(x), \tag{5}$$

$$Y(0) = Y(l) = 0. \tag{6}$$

Задача (5), (6) называется *задачей Штурма-Лиувилля* (или *спектральной задачей*). Она состоит в нахождении тех значений λ, для которых существуют нетривиальные (!) решения задачи (5), (6). Такие λ называются *собственными значениями*, а соответствующие им $Y(x)$ называются *собственными функциями* задачи (5), (6).

Если $\lambda > 0$, то общее решение (5) имеет вид

$$Y(x) = C_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Условие (6) принимает вид:

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda}l} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0,$$

откуда следует, что $C_1 = C_2 = 0$. Следовательно, положительное λ не может быть собственным значением задачи Штурма-Лиувилля.

Если $\lambda = 0$, то $Y'' = 0$, и $Y(x)$ – есть линейная функция. Поскольку она равна нулю в двух точках $x = 0$ и $x = l$, то $Y \equiv 0$.

Итак, только отрицательное λ может быть собственным значением задачи Штурма-Лиувилля.

Пусть $\lambda = -\mu^2$. Тогда

$$Y(x) = C_1 \sin \mu x + C_2 \cos \mu x.$$

Из условия $Y(0) = 0$ следует, что $C_2 = 0$. Условие $Y(l) = 0$ записывается в виде

$$C_1 \cdot \sin \mu l = 0.$$

Так как $Y(x)$ не должно тождественно равняться 0, то $C_1 \neq 0$. Следовательно, $\mu = k \cdot \frac{\pi}{l}$ и существует счетное множество собственных значений

$$\lambda_k = -k^2 \cdot \frac{\pi^2}{l^2}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Соответствующие им собственные функции

$$Y_k(x) = \sin \mu_k x, \quad \text{где } \mu_k = k \cdot \frac{\pi}{l}.$$

Итак, второй шаг завершается нахождением всех собственных значений и собственных функций задачи (5), (6).

3. На третьем шаге требуется решить уравнение для второго сомножителя $Z(t)$. Для каждого μ_k уравнение имеет вид

$$Z''(t) + a^2 \mu_k^2 Z = 0.$$

Его решение
$$Z_k = C_k \cdot \cos \mu_k at + D_k \cdot \sin \mu_k at.$$
Тем самым, найдены все решения уравнения (1) вида (4), которые удовлетворяют условию (3). Вот эти решения
$$u_k(x,t) = \sin \mu_k x \cdot \left[C_k \cdot \cos \mu_k at + D_k \cdot \sin \mu_k at\right],$$
где C_k и D_k – произвольные постоянные. Любая линейная комбинация функций $u_k(x,t)$, очевидно, тоже удовлетворяет уравнению (1) и краевому условию (3). Однако для такой линейной комбинации может не выполняться начальные условия (2) при произвольных гладких функциях $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

4. Следующий шаг состоит в том, что решение всей задачи (1), (2), (3) мы будем искать в виде суммы бесконечного ряда
$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t). \tag{7}$$
Пока мы будем изучать его формально, не занимаясь вопросом сходимости. Подставляя этот ряд в начальные условия (2), получаем (формально) равенства
$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \sin \mu_k x = \varphi(x), \quad \mu_k = \frac{k\pi}{l}, \tag{8}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} D_k \cdot a\mu_k \sin \mu_k x = \psi(x). \tag{9}$$
Эти равенства представляют собой разложение функций φ и ψ в ряд Фурье по системе функций $\sin \mu_k x$. Находим коэффициенты разложения:
$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin \mu_k x dx, \tag{10}$$
$$D_k = \frac{2}{ak\pi}\int_0^l \psi(x)\sin \mu_k x dx. \tag{11}$$
Напомним, что (формально) эти формулы получаются умножением равенств (8) и (9) на $\sin \mu_k x$ и почленным их интегрированием по отрезку $[0,l]$. Так как система функций $\sin \frac{k\pi}{l} x$ ортогональна, и, кроме того,
$$\int_0^l \sin^2\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx = \frac{l}{2},$$
то получаем (10) и (11).

5. Последний шаг состоит в доказательстве того, что при определенных условиях, наложенных на φ и ψ, сумма выписанного ряда действительно является решением задачи (1), (2), (3). (Для упрощения доказательства мы наложим очень сильные условия, весьма далекие от необходимых. Позже мы получим слабые решения задачи (1)–(3) при менее ограничительных свойствах φ и ψ).

Напомним, что функция называется финитной, если он равна нулю в какой-то окрестности границы своей области определения. Запись $f(x) \in C_0^4([0,l])$ означает, что $f(x)$ – финитна на $[0,l]$ и имеет на нем непрерывные производные до 4-го порядка. Решение задачи (1)–(3) будет рассматриваться в замкнутом прямоугольнике

$$\bar{Q}_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}.$$

Теорема 1 *Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C_0^4([0,l])$. Тогда для любого $T > 0$ ряд (7) равномерно сходится в $\bar{Q}_T$, его сумма дважды непрерывно дифференцируема в $\bar{Q}_T$, удовлетворяет уравнению (1), а также условиям (2), (3). (Такие решения называются классическими).*

Доказательство. Достаточно проверить, что ряд (7) и ряды, полученные его почленным дифференцированием до 2-го порядка включительно, равномерно сходятся в $\bar{Q}_T$. В таком случае выполнение условия (3) очевидно, т.к., оно выполнено для каждого члена этого ряда.

Легко проверить, что сумма ряда (7) удовлетворяет уравнению (1). Действительно, каждый член ряда, по построению, удовлетворяет однородному уравнению (1), т.е.,

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Из равномерной сходимости упомянутых выше рядов следует, что $u(x,t) \in C^2(\bar{Q})$, и ряд (7) можно почленно дифференцировать до 2-го порядка. Поэтому

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

В силу полноты системы $\sin(\frac{n\pi}{l}x)$, если ряд Фурье непрерывной функции равномерно сходится, то его сумма равна этой функции. Отсюда вытекает выполнение начальных условий (2).

Для окончания доказательства осталось проверить равномерную сходимость ряда (7) и рядов, полученных его почленным дифференцированием до 2-го порядка. Как известно, для этого достаточно построить числовые ряды с положительными членами, которые мажорируют рассматриваемые ряды. Оценим сверху коэффициенты рядов (8) и (9). Для этого интегралы (10) и (11) проинтегрируем по частям 4 раза:

$$C_k = \frac{2}{l\mu_k^4}\int_0^l \frac{\partial^4\varphi(x)}{\partial x^4}\sin\mu_k x dx,$$
$$D_k = \frac{2}{ak\pi\mu_k^4}\int_0^l \frac{\partial^4\psi(x)}{\partial x^4}\sin\mu_k x dx.$$

(внеинтегральные члены обратились в нуль в силу того, что $\varphi(x),\ \psi(x) \in C_0^4([0,l])$. Поскольку подынтегральные функции непрерывны, получаем следующую оценку:

$$|C_k| + |D_k| \leqslant M \cdot K^{-4},$$

т.к., $\mu_k = k\cdot\frac{\pi}{l}$. Ряды, которые получаются из ряда (7) при одно- и двухкратном дифференцировании, имеют вид:
(1 раз по x):

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu_k\cos\mu_k x\,(C_k\cos\mu_k at + D_k\sin\mu_k at)$$

(2 раза по x):

$$-\sum_{i=1}^{\infty}\mu_k^2\sin\mu_k x\,(C_k\cos\mu_k at + D_k\sin\mu_k at)$$

(1 раз по t):

$$a\sum_{i=1}^{\infty}\mu_k\sin\mu_k x\,(-C_k\sin\mu_k at + D_k\cos\mu_k at)$$

(2 раза по t):

$$-a^2\sum_{i=1}^{\infty}\mu_k^2\sin\mu_k x\,(C_k\cos\mu_k at + D_k\sin\mu_k at)$$

Из оценок для коэффициентов C_k и D_k, а также из того, что $\mu_k = k\cdot\frac{\pi}{l}$, ясно, что каждый из выписанных выше рядов, а также ряд (7), мажорируется числовым рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} M\cdot k^{-2},$$

который абсолютно сходится.

Мы завершили доказательство существования классического решения задачи (1), (2), (3) при условиях на начальные данные φ и ψ, сформулированные в теореме 1. ■

Лекция 7

§1. Первая краевая задача для неоднородного уравнения струны

Рассмотрим задачу Коши для уравнения вынужденных колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{3}$$

Как и раньше, областью определения искомого решения является прямоугольник

$$\bar{Q} = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l; 0 \leqslant t \leqslant T\}.$$

Решение задачи (1), (2), (3) будем искать в виде ряда Фурье:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) \sin \mu_k x, \tag{4}$$

где $\sin \mu_k x$ – решение задачи Штурма-Лиувилля

$$y''(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = y(l) = 0, \quad \lambda = -\mu_k^2, \quad \mu_k = \frac{k\pi}{l}.$$

В (4) функции $p_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l u(x,t)\sin \mu_k x dx$ – это коэффициенты Фурье разложения искомой функции $u(x,t)$.

Предположим, что решение $u(x,t) \in C^2(\bar{Q})$. Обе части уравнения (1) умножаем на $\sin \mu_k x$ и интегрируем по x от 0 до l:

$$\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\sin \mu_k x dx = a^2 \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \sin \mu_k x dx + \int_0^l f(x,t)\sin \mu_k x dx. \tag{5}$$

Интеграл в левой части допускает перестановку дифференцирования и интегрирования:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_0^l u(x,t)\sin \mu_k x dx\right) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{l}{2} p_k(t)\right).$$

Первый интеграл в правой части (5) проинтегрируем по частям два раза:

$$\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\sin \mu_k x dx = \sin \mu_k x \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_0^l - \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\mu_k \cos \mu_k x dx =$$

$$= 0 - \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\mu_k \cos\mu_k x dx = -u(x,t)\mu_k \cos \mu_k x|_0^l - \int_0^l \mu_k^2 u(x,t)\sin \mu_k x dx =$$

$$= 0 - \int_0^l \mu_k^2 u(x,t)\sin\mu_k x dx = -\mu_k^2 \frac{l}{2} p_k(t).$$

Внеинтегральные члены равны нулю, т.к., в первый раз $\sin(\mu_k x) = 0$ при $x = 0$ и $x = l$, а во второй раз – т.к. $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям (3).

Второй интеграл в правой части (5) совпадает с коэффициентом ряда Фурье функции $f(x,t)$:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin \mu_k x, \qquad \text{где} \tag{6}$$

$$q_k(t) = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(x,t) \sin \mu_k x dx. \tag{7}$$

Следовательно, функция $p_k(t)$ удовлетворяет уравнению (см.(5))

$$p_k''(t) = -\mu_k^2 a^2 p_k(t) + q_k(t). \tag{8}$$

Из условий (2) вытекают начальные условия для этого ОДУ:

$$p_k(0) = 0, p_k'(0) = 0. \tag{9}$$

Замечание: из уравнений (8),(9) вытекает теорема единственности классического решения смешанной краевой задачи (1) – (3), поскольку $q_k(t) \equiv 0 \Rightarrow p_k(t) \equiv 0$ при всех $t \geqslant 0$. Если же каждый коэффициент Фурье в разложении $u(x,t)$ при любом $t \geqslant 0$ равен нулю, то и сама функция $u(x,t) \equiv 0$.

Решаем для ОДУ задачу Коши (8), (9) с нулевыми начальными условиями:

$$p_k(t) = \frac{1}{a\mu_k} \cdot \int_0^t q_k(s) \sin a\mu_k(t-s) ds. \tag{10}$$

Проверить, что это решение можно прямой подстановкой (10) в (8).

Мы построили (формально) предполагаемое решение задачи (1), (2), (3), представив его в виде ряда Фурье (4), где $p_k(t)$ определено по формуле (10). Докажем теперь точный результат.

Теорема 1 *Пусть функция $f(x,t)$ трижды непрерывно дифференцируема в прямоугольнике $\bar{Q}_T$ и обращается в нуль в окрестности его боковых сторон при $x = 0$ и $x = l$. Тогда существует классическое (из класса $C^2(\bar{Q}_T)$) решение задачи (1), (2), (3). Это решение записывается в виде ряда (4), где $p_k(t)$ и $q_k(t)$ определяются из (7) и (10).*

Доказательство. Рассмотрим выражение (7) для $q_k(t)$. В силу сделанных предположений относительно функции $f(x,t)$, мы можем проинтегрировать правую часть (7) три раза по частям, откуда получим оценку (для любого индекса k):

$$|q_k| \leqslant \frac{M}{k^3}. \tag{11}$$

По построению функции $u(x,t)$ сумма ряда (4) формально удовлетворяет уравнению (1), начальным (2) и граничным (3) условиям. Действительно,

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k(0)\cdot\sin(\mu_k x) \equiv 0 \quad \text{при } x\in[0,l],\\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k'(0)\cdot\sin(\mu_k x) \equiv 0,\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(p_k''(t)\sin(\mu_k x) + \mu_k^2 a^2\cdot p_k(t)\sin(\mu_k x)\right) =\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t)\cdot\sin(\mu_k x) = f(x,t)
\end{aligned}
$$

Поэтому, как и на прошлой лекции, доказательство сводится к проверке того, что ряд (s6i4) и все ряды, которые получаются из (s6i4) почленным дифференцированием по x и t два раза, сходятся в $\bar{Q}_T$ равномерно. Для равномерной сходимости этих рядов достаточно получить оценку их коэффициентов. Напомним, что $\mu_k = \frac{k\pi}{l}$. Поэтому из (s6i10) и из (s6i11) следуют оценки:

$$
|p_k(t)| \leqslant \frac{M_1}{k^4},\quad |p_k'(t)| \leqslant \frac{M_2}{k^3},\quad |p_k''(t)| \leqslant \frac{M_3}{k^2}.
$$

Соответствующие числовые ряды абсолютно сходятся. Теорема доказана. ■

§2. Энергетическая оценка. Непрерывная зависимость решения смешанной задачи от начальных данных и правой части

Мы построили решение для смешанной краевой задачи уравнения колебаний струны и доказали единственность этого решения. Сейчас мы дадим другое доказательство единственности, которое имеет самостоятельную ценность, т.к., позволяет установить непрерывную зависимость решения от исходных данных.

Теорема 2 *Пусть функция $u(x,t)$ является классическим решением задачи:*

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\quad 0\leqslant x\leqslant l \quad,\ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{1}
$$

$$
u(x,0) = \varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \tag{2}
$$

$$
u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{3}
$$

Тогда существует число $M>0$, не зависящее от φ, ψ и f, такое, что справедливо неравенство:

$$
|u(x,t)| \leqslant M\cdot\left(\max_{y\in[0,l]}|\varphi'(x)| + \max_{y\in[0,l]}|\psi(x)| + \max_{(y,\tau)\in[0,l]\times[0,T]}|f(y,\tau)|\right).
$$

Доказательство. Умножим обе части уравнения (1) на $\frac{\partial u}{\partial t}$ и проинтегрируем по $[0, l]$. Интеграл слева равен:

$$\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^l \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right]^2 dx$$

Преобразовываем интеграл в правой части

$$\int_0^l a^2 \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial x^2} dx + \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \cdot f(u,t) dx = a^2 \int_0^l \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right\} dx +$$
$$+ \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} f(x,t) dx = a^2 \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_0^l - \frac{a^2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx + \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \cdot f(x,t) dx$$

Граничное условие (3) означает, что $u(x,0)$ и $u(l,t)$ тождественно равны нулю. Поэтому $\frac{\partial u}{\partial t}|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial t}|_{x=l} = 0$. Получаем равенство:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{a^2}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right] = \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \cdot f(x,t) dx. \tag{4}$$

Выражение в квадратных скобках обозначим $E(t)$. Это функция называется *энергией* струны,

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2 dx + \frac{a^2}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx. \tag{5}$$

Заметим, что при $f \equiv 0$ энергия постоянна: $E(t) = E(0)$. Теперь проинтегрируем (4) по t от 0 до t:

$$\begin{aligned}
E(t) = E(0) + \int_0^t \int_0^l f(x,s) \frac{\partial u}{\partial t}(x,s) dx ds \leqslant \\
\leqslant E(0) + \int_0^t \int_0^l \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,s)\right)^2 dx + f^2(x,s)\right] dx ds \leqslant \\
\leqslant E(0) + \int_0^t \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,s)\right)^2 dx + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,s)\right)^2\right] dx ds + \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^l f^2(x,s) dx ds.
\end{aligned}$$

Обозначим

$$A = \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^l f^2(x,s) dx ds + E(0).$$

Тогда при $t \leqslant T$ получаем неравенство:

$$E(t) \leqslant \int_0^t E(s) ds + A. \tag{6}$$

Отсюда вытекает оценка

$$E(t) \leqslant A e^t. \tag{7}$$

В самом деле, домножим (6) на e^{-t} и получим:

$$E(t)e^{-t} - \int_0^t E(s)e^{-t}ds \leqslant Ae^{-t} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\int_0^t E(s)ds\right) \leqslant Ae^{-t}.$$

Следовательно,

$$e^{-t} \cdot \int_0^t E(s)ds \leqslant A(1-e^{-t}),$$

т.е.

$$\int_0^t E(s)ds \leqslant A(e^t - 1) \quad \Longrightarrow \quad E(t) \leqslant A(e^t-1) + A = A \cdot e^t.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$E(t) \leqslant e^t \left[\int_0^T \int_0^l f^2(x,s)dxds + \int_0^l \left(\psi^2(x) + a^2\left(\varphi'(x)\right)^2\right)dx\right].$$

Тогда при $0 \leqslant t \leqslant T$

$$\frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2 dx + \frac{a^2}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant M_1 \left[\int_0^T \int_0^l f^2(x,s)dxds + \int_0^l \left(\psi^2(x) + a^2\left(\varphi'(x)\right)^2\right)dx\right].$$

Из этой интегральной оценки легко получить равномерную оценку решения. Поскольку $u(0,t) = 0$, по формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$u(x,t) = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial x}(\xi,t)d\xi,$$

тогда

$$|u(x,t)| \leqslant \int_0^l |\frac{\partial u}{\partial x}(\xi,t)|d\xi \leqslant \left[\int_0^l 1^2 \cdot \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 d\xi\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь применили неравенство Коши-Буняковского. Следовательно,

$$|u(x,t)| \leqslant M_2 \cdot \left[\int_0^T \int_0^l f^2(x,t)dxdt + \int_0^l \left(\psi^2(x) + a^2\left(\varphi'(x)\right)^2\right)dx\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (8)$$

Откуда вытекает более грубая оценка:

$$|u(x,t)| \leqslant M_3 \left(\max_{x\in[0,l]}|\varphi'(x)| + \max_{x\in[0,l]}|\psi(x)| + \max_{(x,t)\in[0,l]\times[0,T]}|f(x,t)|\right),$$

■

Если теперь известно, что

$$|f(x,t)| \leqslant \varepsilon, \quad |\varphi'(x)| \leqslant \varepsilon, \quad |\psi(x)| \leqslant \varepsilon,$$

Тогда
$$|u(x,t)| \leqslant M_4 \cdot \varepsilon.$$
В частности, если начальные функции в (2) и правая часть уравнения $f(x,t)$ равны нулю, то $u(x,t) \equiv 0$.

Тем самым доказаны теоремы о единственности решения задачи (1) – (3) и о непрерывной зависимости ее решения от начальных данных и правой части.

Напомним физический смысл $E(t)$. Если $f(t) \equiv 0$, то из равенства (4) следует, что $E(t) \equiv const$. Физический смысл этой функции – полная энергия струны: кинетическая энергия + потенциальная энергия. По этой причине доказанное неравенство принято называть *энергетической оценкой.*

Лекция 8

§1. Обобщенные решения уравнения колебаний струны

До сих пор мы рассматривали так называемые *классические решения* краевых задач, т.е. функции, обладающие непрерывными производными необходимого порядка, которые удовлетворяют уравнению и краевым условиям (начальным и граничным). Для доказательства существования таких решений требуются довольно жесткие условия на начальные функции, граничные функции и функции правой части. Зачастую эти условия являются избыточными, да и требования большой гладкости решения не всегда оправданы. Например, при изучении колебаний струны разумно считать, что начальное положение описывается непрерывной и лишь кусочно-непрерывно дифференцируемой функцией. Тогда классическое решение не существует, однако оправданно считать, что формула Даламбера правильно описывает физический процесс. Это приводит к понятию *обобщенного решения* краевой задачи, которое даёт возможность получать разумные решения при слабых ограничениях на условия задачи.

Класс обобщенных решений выбирается шире класса классических. При этом естественно потребовать следующие условия:

1. Если классическое решение существует, то оно должно быть также и обобщенным (чтобы имело смысл слово “обобщенное”).

2. Класс обобщенных решений должен быть шире класса классических (иначе нет смысла их вводить).

3. Класс обобщенных решений должен быть разумным. Например, решение должно быть единственным, а задача корректна в соответствующем классе решений.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения струны в $\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Пусть φ и ψ лишь непрерывные функции. Назовем *обобщенным решением* задачи (1), (2) функцию $u(x,t)$, построенную по формуле Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy. \tag{3}$$

Легко видеть, что такое обобщенное решение удовлетворяет всем трем перечисленным выше условиям.

Однако, это обобщенное решение имеет ещё одно важное свойство. Рассмотрим произвольную ограниченную область Ω в полупространстве $(x,t), x \in \mathbb{R}, t > 0$. Пусть отрезок $[A,B]$ на оси x – это область зависимости решений уравнения колебаний струны в области Ω от начальных данных φ и ψ. Пусть φ_n и ψ_n – последовательности дважды непрерывно дифференцируемых функций, которые на $[A,B]$ равномерно сходятся при

$n \to +\infty$ к функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. (Согласно теореме Вейерштрасса, в качестве таких функций можно взять полиномы). Обозначим через $u_n(x,t)$ решение задачи (1), (2) с начальными данными $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$. Это классические решения, которые строятся по формуле Даламбера. Тогда $u_n(x,t)$ равномерно в области Ω сходится к обобщенному решению $u(x,t)$ при $n \to +\infty$. Это утверждение очевидно вытекает из формулы Даламбера.

Это свойство подсказывает ещё один способ задания обобщенных решений, когда нет явных формул, задающих решение задачи: обобщенное решение можно определить как предел классических решений.

Мы рассмотрим такие обобщенные решения на примере решения краевой задачи для уравнения ограниченной струны (1):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l], \tag{5}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{6}$$

Напомним, что классическое решение задачи (4) – (6) это функция $u(x,t) \in C^2(\overline{Q})$, где $\overline{Q} = \{(x,t), 0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$, которая удовлетворяет уравнению (4), а также условиям (5)и(6). Мы уже научились строить классические решения при достаточно сильных предположениях на φ и ψ. Введя понятие обобщенного решения, можно значительно расширить класс допустимых φ и ψ.

Определение 1 *Функция $u(x,t)$ называется обобщенным решением задачи (4) – (6), если существуют классические решения $u_n(x,t)$ этой задачи с начальными функциями $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$, такие, что при $n \to +\infty$ последовательности $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ сходятся равномерно на $[0,l]$ к $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, соответственно, а $u_n(x,t) \to u(x,t)$ равномерно в $\overline{Q}$.*

Лемма 1 *Если $u(x,t)$ – классическое решение задачи (4) – (6), то*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \mu_k x \left(C_k \cos \mu_k a t + D_k \sin \mu_k a t \right), \qquad \text{где } \mu_k = \frac{k\pi}{l}, \tag{7}$$

$$C_k = \frac{1}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin \mu_k x dx, \tag{8}$$

$$D_k = \frac{2}{ak\pi} \int\limits_0^l \psi(x) \sin \mu_k x dx \tag{9}$$

Доказательство. Поскольку $u(x,t) \in C^2(\overline{Q})$ и $u(0,t) = u(l,t) = 0$, то при каждом $t \in [0,T]$ функция $u(x,t)$ представима рядом Фурье

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) \sin \mu_k x,$$

который равномерно сходится по $x \in [0, l]$ при фиксированном t. Функции $p_k(t)$ – это коэффициенты Фурье $u(x,t)$, которые вычисляются по формулам

$$p_k(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l u(x,t)\sin \mu_k x dx.$$

Следовательно, в силу уравнения (4) имеем:

$$p_k^{''}(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\sin \mu_k x dx = \frac{2a^2}{l}\int\limits_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\sin \mu_k x dx.$$

Последний интеграл интегрируем по частям два раза, учитывая граничные условия (6), и получаем ОДУ:

$$p_k^{''}(t) = -a^2\mu_k^2\frac{2}{l}\int\limits_0^l u(x,t)\sin \mu_k x dx = -a^2\mu_k^2 p_k(t)$$

Это линейное уравнение второго порядка имеет общее решение вида

$$p_k(t) = C_k \cos \mu_k at + D_k \sin \mu_k at. \tag{10}$$

Поэтому, при $t = 0$ получаем

$$C_k = p_k(0) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin \mu_k x dx.$$

Найдём выражение для D_k. Вспомним, что $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in C^1(\overline{Q})$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(l,t) = 0$. Следовательно, функция $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ тоже разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье (по $x \in [0, l]$ при каждом фиксированном $t \in [0, T]$):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t)\sin \mu_k x,$$

где

$$q_k(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\sin \mu_k x dx = \frac{d}{dt}\frac{2}{l}\int\limits_0^l u(x,t)\sin \mu_k x dx = \frac{d}{dt}p_k(t).$$

В частности, $p_k^{'}(0) = q_k(0)$. Однако, из (10) находим, что $p_k(0) = \mu_k a D_k$, т.е.,

$$D_k = \frac{1}{\mu_k a}p_k^{'}(0) = \frac{1}{\mu_k a}q_k(0) = \frac{1}{\mu_k a}\frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x)\sin \mu_k x dx.$$

Мы проверили выполнение (8) и (9). Лемма доказана. ■

Теорема 1 *Если начальные функции таковы, что $\varphi(x) \in C^2([0,l])$, $\psi(x) \in C^1([0,l])$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \psi(0) = \psi(l) = 0$, то существует единственное обобщенное решение задачи (4) – (6).*

Доказательство. Рассмотри в качестве $u_n(x,t)$ частичную сумму ряда (7):

$$u_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \sin \mu_k x (C_k \cos \mu_k at + D_k \sin \mu_k at),$$

где коэффициенты C_k и D_k определены по формулам (8) и (9). Ясно, что $u_n(x,t)$ – это классическое решение задачи (4) – (6) с соответствующими начальными условиями. Интегрируем по частям интеграл (8) два раза, а интеграл (9) – один раз. Учитывая граничные условия на φ и ψ, получаем оценки:

$$|C_k| \leqslant Mk^{-2}, \quad |D_k| \leqslant Mk^{-2}.$$

Отсюда, как мы знаем, вытекает, что в области $\overline{Q}$ последовательность $u_n(x,t)$ равномерно сходится к функции

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \mu_k x (C_k \cos \mu_k at + D_k \sin \mu_k at).$$

Из формул (8) и (9) для коэффициентов C_k и D_k следует, что $u_n(x,0)$ равномерно сходится к $\varphi(x)$ и $\dfrac{\partial u_n}{\partial t}(x,0)$ равномерно сходится к $\psi(x)$ при $n \to +\infty$. (Использовали оценки $|C_k| \leqslant Mk^{-2}, |D_k| \leqslant Mk^{-2}$).

Мы доказали существование слабого решения. Отметим, что требование 1 к обобщенному решению, очевидно, выполнено, так как если $u(x,t)$ – классическое решение, то в качестве $u_n(x,t)$ можно взять стационарную последовательность $u_n(x,t) \equiv u(x,t)$.

Для доказательства единственности следует доказать некоторое интегральное тождество, которому удовлетворяют любые обобщенные решения. Обозначим:

$$B = \left\{ v \in C^4(\overline{Q}) \quad | \quad v(x,T) = \frac{\partial v}{\partial t}(x,T) = 0; \quad v(0,t) = v(l,t) = 0 \right\}.$$

Утверждается, что если $u(x,t)$ – обобщенное решение, задачи (4) – (6) то при любой $v \in B$ имеет место тождество:

$$\int\limits_{\overline{Q}} u(x,t) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dxdt = \int\limits_0^l \varphi(x) \frac{\partial v}{\partial t}(x,0)dx - \int\limits_0^l \psi(x) v(x,0)dx. \tag{11}$$

Сначала оно доказывается для классических решений $u(x,t)$. Для этого надо умножить уравнение (4) на $v(x,t)$ и проинтегрировать по $\overline{Q}$. Потом следует проинтегрировать по частям и получится тождество (11). После этого предельным переходом (11) доказывается любого обобщенного решения. Наконец, единственность обобщенного решения доказывается точно так же, как в следующей теореме 2 для более широкого класса обобщенных решений. Теорема доказана. ■

Отметим, что в рассмотренном классе обобщенных решений задача (4) – (6) является корректно поставленной.

§2. Обобщенные решения для неоднородного уравнения колебаний струны

Аналогично рассматриваются обобщенные решения для неоднородного уравнения колебаний струны, которое мы изучали на прошлой лекции. Для простоты ограничимся рассмотрением нулевых начальных условий.

Определение 2 *Функция $u(x,t)$ называется обобщенным решением такой задачи, если существует классическое решение $u_n(x,t)$ этой задачи с правыми частями $f_n(x,t)$, такими, что $f_n(x,t)$ сходятся равномерно к $f(x,t)$, а $u_n(x,t)$ сходятся равномерно к $u(x,t)$ при $n \to +\infty$ на $\overline{Q}$.*

Можно доказать теорему о существовании и единственности такого обобщенного решения при условии, что $f \in C^1_x(\overline{Q}), f(0,t) = f(l,t) = 0$.

Сейчас мы построим обобщенное решение неоднородной задачи при ещё более слабых ограничениях на функцию $f(x,t)$, используя ещё более широкое понятие обобщенного решения.

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{12}$$

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \tag{13}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{14}$$

Определение 3 *Функция $u(x,t) \in C(\overline{Q})$ называется обобщенным решением задачи (12) – (14), если:*

$$\int\limits_{\overline{Q}} u(x,t) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dxdt = \int\limits_{\overline{Q}} f(x,t) v(x,t) dxdt \tag{15}$$

для любой функции $v(x,t) \in B$.

Напомним, что

$$B = \left\{ v \in C^4(\overline{Q}) \quad | \quad v(x,T) = \frac{\partial v}{\partial t}(x,T) = 0; \quad v(0,t) = v(l,t) = 0 \right\}.$$

Обозначим оператор $L = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$. Тогда тождество (15) перепишется так:

$$\int\limits_{\overline{Q}} u(x,t) Lv dxdt = \int\limits_{\overline{Q}} f(x,t) v(x,t) dxdt. \tag{16}$$

Проверим, что любое классическое решение задачи (12) – (14) является обобщенным в этом смысле.

Пусть $u(x,t)$ – классическое решение. Зафиксируем любое $v(x,t) \in B$.

Умножим (12) на $v(x,t)$ и проинтегрируем по $\overline{Q}$. Левую часть получившегося равенства проинтегрируем по частям два раза:

$$\int\limits_{\overline{Q}} v(x,t) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx dt$$

и получим (15). При этом надо убедиться, что все получающиеся внеинтегральные члены равны нулю, т.е.,

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial t} v = 0, & \dfrac{\partial v}{\partial t} u = 0 & \text{при } t = 0,\ t = T. \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} v = 0, & \dfrac{\partial v}{\partial x} u = 0 & \text{при } x = 0,\ x = l. \end{array}$$

Эти равенства выполнены, так как функция $u(x,t)$ удовлетворяет краевым условиям (13), (14), и $v(x,T) = \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,T) = 0, v(0,t) = v(l,t) = 0$.

Таким образом, для рассматриваемых функций справедливо тождество:

$$\int\limits_{\overline{Q}} v\, Lu\, dx\, dt = \int\limits_{\overline{Q}} v\, Lu\, dx\, dt.$$

Это означает, что оператор L с условиями:

$$v(x,T) = \frac{\partial v}{\partial t}(x,T) = 0, v(0,t) = v(l,t) = 0$$

является сопряженным к оператору L с условиями (13), (14).

Теорема 2 *Для любой функции $f(x,t) \in C(\overline{Q})$ существует и единственное обобщенное решение задачи (12) – (14).*

Доказательство. Докажем существование обобщенного решения с помощью предельного перехода по последовательности классических решений. Строим последовательность функций $f_n(x,t) \in C^3(\overline{Q})$, которые обращаются в нуль в окрестности отрезков $\{x = 0, 0 \leqslant t \leqslant T\}$, $\{x = l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$, причем эта последовательность стремится к $f(x,t)$ в среднеквадратичном в $\overline{Q}$ при $n \to \infty$. (Это можно сделать с помощью теоремы Вейерштрасса.)

В силу доказанной на прошлой лекции теоремы, существуют классические решения

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + f_n(x,t),$$

удовлетворяющее (13) и (14). Разность $u_n - u_m$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial^2 (u_n - u_m)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (u_n - u_m)}{\partial x^2} + f_n - f_m$$

В силу интегральной энергетической оценки (8), доказанной на прошлой лекции:

$$|u_n(x,t)-u_m(x,t)| \leqslant M\left(\int\limits_{\overline{Q}} |f_n-f_m|^2\,dxdt\right)^{1/2}.$$

Следовательно, u_n фундаментальна в $C(\overline{Q})$ и сходится равномерно к $u \in C(\overline{Q})$. Как показано выше, для любой функции $v \in B$ справедливо:

$$\int\limits_{Q} u_n Lv dxdt = \int\limits_{Q} f_n v dxdt.$$

Переходя в этом тождестве к пределу при $n \to \infty$, получаем (15). Мы доказали существование обобщенного решения. Теперь докажем его единственность.

Достаточно убедиться в том, что однородная задача имеет только тривиальное решение. Пусть

$$\int\limits_{Q} u(x,t) Lv dxdt = 0, \quad \forall v \in B. \tag{17}$$

Требуется установить, что $u \equiv 0$. Воспользуемся рассуждением от противного. Противоположное утверждение означает, что найдется внутренняя точка $(x_0,t_0) \in Q$, где $u(x_0,t_0) \neq 0$. Можно считать, что $u(x_0,t_0) > 0$ и, следовательно, $u(x,t) > \gamma > 0$ во внутренней окрестности Ω точки (x_0,t_0),

$$\Omega = \left\{(x,t) : (x-x_0)^2 + (t-t_0)^2 < \delta\right\}.$$

Построим функцию $\alpha(x,t) \in C^3(Q), \alpha(x,t) \geqslant 0$, причем $\alpha \equiv 0$ при $(x-x_0)^2+(t-t_0)^2 > \delta$ и $\alpha \geqslant 1$ при $(x-x_0)^2+(t-t_0)^2 < \delta/2$.

Пусть $v(x,t)$ – решение уравнения

$$Lv = \alpha(x,t),$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$v(x,T) = \frac{\partial v}{\partial t}(x,T) = 0, \quad v(0,t) = v(l,t) = 0.$$

Такая задача, очевидно, сводится к (12) – (14) простой заменой времени $\tau = t - T$. Следовательно, существует классическое решение $v(x,t)$. Равенство (15) приобретает вид:

$$\int\limits_{Q} u(x,t)\alpha(x,t) dxdt = 0,$$

что противоречит условию о знаке $u(x,t)$ в Ω и постоянству $\alpha(x,t)$. Теорема доказана. ■

В заключение отметим что, рассмотренная неоднородная задача будет корректной в классе обобщенных решений.

Лекция 9. Задача Штурма-Лиувилля

§1 Постановка задачи

Рассмотрим более общее уравнение колебаний неоднородной струны:

$$\rho u_{tt} = (p(x)u_x)_x - q(x)u, \quad x \in [0,l]. \tag{1}$$

Попробуем упростить уравнение, сделав замену неизвестной функции $u(x,t) = z(x)v(x,t)$, где $z(x)$ некоторая известная функция. Оказывается, можно подобрать $z(x)$ так, чтобы в уравнении для $v(x,t)$ вида (1) было $\rho(x) \equiv 1$. Действительно,

$$u_{tt} = zv_{tt}, \quad u_x = zv_x + z_x v,$$
$$u_{xx} = zv_{xx} + 2z_x v_x + z_{xx} v.$$

После подстановки в уравнение (1) и деления на $z\rho$, получаем:

$$v_{tt} = \frac{p}{\rho} v_{xx} + \left(\frac{2p}{\rho}\frac{z_x}{z} + \frac{p_x}{\rho} \right) v_x + B(x)v.$$

Чтобы это уравнение приняло вид (1) с $\rho \equiv 1$ необходимо выполнение условия:

$$\left(\frac{p}{\rho}\right)_x = \frac{2p}{\rho}\frac{z_x}{z} + \frac{p_x}{\rho}.$$

Раскрываем скобки и получаем:

$$\frac{z_x}{z} = -\frac{\rho_x}{2\rho}, \qquad \text{т.е.,}\ \frac{d}{dx}(\ln z + 1/2 \ln \rho) = 0.$$

Следовательно, $z\rho^{1/2} = const$. Значит, можно положить $z = \rho(t)^{-1/2}$. Предполагается, что $\rho > 0$, поэтому такая замена всегда возможна.

Рассмотрим теперь уравнение

$$u_{tt} = (p(x)u_x)_x - q(x)u, \quad x \in [0,l], \quad t > 0. \tag{2}$$

Дополним его нулевыми граничными условиями:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0. \tag{3}$$

Решая это уравнение методом разделения переменных, приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda y(x), \tag{4}$$
$$y(0) = y(l) = 0. \tag{5}$$

Можно вместо (5) рассмотреть более общие граничные условия:

$$\alpha y'(0) + \beta y(0) = 0, \quad \gamma y'(l) + \delta y(l) = 0, \tag{6}$$

где

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \quad \gamma^2 + \delta^2 \neq 0.$$

Такая задача называется задачей Штурма-Лиувилля. Обычно предполагается, что

$$p \in C^1([0, l]), q \in C([0, l]), \quad p(x) \neq 0 \ \forall x \in [0, l] \text{ (условие "эллиптичности").}$$

С помощью замены независимой переменной $\xi = \int\limits_0^x p(x)^{-1/2} dx$ и неизвестной функции $z = p^{1/2}(x) y$ задача (4), (5) сводится к более простой задаче, в которой $p(x) \equiv 1$. (Проверьте!) Поэтому, вместо (4), (5) достаточно изучить задачу:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \tag{7}$$

$$y(0) = y(l) = 0. \tag{8}$$

Мы будем считать, что $q(x) \in C([0, l]), q(x) \geqslant 0$. Это не является ограничением, так как мы можем добиться выполнения этого неравенства, добавив к λ некоторую фиксированную константу.

2. Свойства оператора Штурма-Лиувилля

Введем оператор Штурма-Лиувилля

$$L = -\frac{d}{dx^2} + q(x),$$

который определен на пространстве $\mathcal{D}_L$ функций $v(x) \in C^2([0, l])$, причем $v(0) = v(l) = 0$. Задача Штурма-Лиувилля состоит в нахождении и исследовании собственных значений и собственных функций оператора L. Сформулируем и докажем ряд свойств этого оператора. Будем рассматривать пространство $L_2(0, l)$ функций, интегрируемых в квадрате по Лебегу. Скалярное произведение в этом пространстве определяется по формуле

$$(u, v) = \int\limits_0^l u(x) v(x) dx.$$

Утверждение 1 *Оператор L симметричен, т. е.,*

$$(Lv_1, v_2) = (v_1, Lv_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathcal{D}_L$$

Доказательство.

$$(Lv_1, v_2) - (v_1, Lv_2) = \int\limits_0^l (-v_1'' v_2 + v_1 v_2'') dx =$$

$$= \int\limits_0^l \frac{d}{dx}(-v_1' v_2 + v_1 v_2') dx = (-v_1' v_2 + v_1 v_2')|_0^l = 0.$$

Утверждение доказано. ■

Утверждение 2 *Оператор L положителен и все его собственные значения положительны.*

Доказательство.

$$(Lv, v) = \int\limits_0^l (-v^{''} v + q(x)v^2)dx =$$

$$= \int\limits_0^l ((v^{'}(x))^2 + q(x)v^2(x))dx > 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}_L, \ v \neq 0.$$

Здесь мы применили интегрирование по частям.

Поэтому, если $Lv = \lambda v$, то $\lambda(v, v) = (Lv, v) > 0$ при $v \neq 0$, т.е. $\lambda > 0$. Утверждение доказано. ■

Утверждение 3 *Все собственные функции с разными собственными значениями ортогональны в $L_2(0, l)$.*

Доказательство. Пусть

$$Lv_1 = \lambda_1 v_1, \quad Lv_2 = \lambda_2 v_2.$$

Тогда

$$\lambda_1(v_1, v_2) = (Lv_1, v_2) = (v_1, Lv_2) = \lambda_2(v_1, v_2).$$

Поэтому, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(v_1, v_2) = 0$.
Утверждение доказано. ■

Утверждение 4 *Все собственные значения являются однократными, т.е., все собственные подпространства одномерны.*

Доказательство. Действительно, по теореме единственности любое решение ОДУ вида

$$y^{''} + a(x)y^{'} + b(x)y = 0,$$

которые обращаются в нуль при $x = x_0$, должно быть пропорционально (единственному) решению этого уравнения с начальными условиями

$$y(x_0) = 0, y^{'}(x_0) = 1.$$

Утверждение доказано. ■

Сформулируем основную теорему, часть которой мы уже доказали.

Теорема 1 *Задача Штурма-Лиувилля имеет бесконечное число решений, все собственные значения положительны и образуют последовательность*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots ; \quad \lambda_n \to +\infty \quad (n \to \infty).$$

Собственные функции $y_n(x)$, соответствующие λ_n, ортогональны. Семейство собственных функций $\{y_n(x)\}$ образует ортонормированный базис в пространстве $L_2(0, l)$. Собственная функция $y_n(x)$ имеет ровно $(n - 1)$ нулей на интервале $[0, l]$.

Полностью доказательство теоремы можно прочитать в книге М.А.Шубин, “Лекции об уравнениях математической физики”.

3. Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля

Рассмотрим оператор Штурма-Лиувилля

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

с областью определения

$$\mathcal{D}_L = \left\{v(x) \in C^2([0,l]), v(0) = v(l) = 0\right\},$$

действующий в пространстве $C([0,l]), q(x) > 0$.

Покажем, что этот оператор обратим, причем обратный оператор L^{-1} является интегральным, т.е., он имеет следующий вид:

$$L^{-1}f(x) = \int\limits_0^l G(x,\xi)f(\xi)d\xi, \tag{1}$$

где $G \in C([0,l] \times [0,l])$. Функция $G(x,\xi)$ называется *функцией Грина* оператора L. Легко проверить, что функция $G(x,\xi)$ однозначно определяется формулой (1).

Чтобы найти $L^{-1}f(x) = v(x)$ необходимо решить уравнение:

$$-v^{''}(x) + q(x)v(x) = f(x), \quad v(0) = v(l) = 0. \tag{2}$$

Воспользуемся для этого методом вариации постоянных. Рассмотрим два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ однородного уравнения:

$$-y^{''}(x) + q(x)y(x) = 0 \tag{3}$$

с граничными условиями:

$$y_1(0) = 0, \quad y_1^{'}(0) = 1, \tag{4}$$

$$y_2(l) = 0, \quad y_2^{'}(l) = -1. \tag{5}$$

Ясно, что функции y_1 и y_2 линейно независимы, так как 0 не является собственным значением оператора L (напомним, что $q \geqslant 0$).

Ищем решение уравнения (2) в виде:

$$v(x = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x). \tag{6}$$

Тогда,

$$v^{'}(x) = C_1y_1^{'} + C_2y_2^{'} + (C_1^{'}y_1 + C_2^{'}y_2).$$

Пусть $(C_1^{'}y_1 + C_2^{'}y_1) \equiv 0$. Тем самым

$$v^{''}(x) = C_1y_1^{''} + C_2y_2^{''} + (C_1^{'}y_1^{'} + C_2^{'}y_2^{'}).$$

Пусть $(C_1^{'}y_1^{'} + C_2^{'}y_2^{'}) \equiv -f(x)$. Тогда, из уравнения (2)

$$v^{''}(x) = q(C_1y_1 + C_2y_2) - f = qv - f,$$

т.е., $v(x)$ удовлетворяет (2), если выполняется система

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = -f(x). \end{cases} \tag{7}$$

Определитель этой системы относительно неизвестных $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ является определителем Вронского:

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

Известно (проверяется дифференцированием), что $W(x) = const$, причем

$$W(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1(x),\ y_2(x) \text{ – линейно независимые функции.}$$

Решаем систему (7) по методу Крамера и находим:

$$C_1'(x) = \frac{1}{W} f(x)y_2(x), \quad C_2'(x) = -\frac{1}{W} f(x)y_1(x).$$

(Подставьте в систему!). Осталось проинтегрировать по x и учесть граничные условия (4) и (5):

$$C_1(l) = 0, \quad C_2(0) = 0.$$

Получаем формулы:

$$C_1(x) = -\frac{1}{W}\int_x^l f(\xi)y_2(\xi)d\xi, \quad C_2(x) = -\frac{1}{W}\int_0^x f(\xi)y_1(\xi)d\xi.$$

Следовательно, решение $v(x)$ существует, единственно и задаётся следующим выражением:

$$v(x) = -\frac{1}{W}\int_x^l y_1(x)y_2(\xi)f(\xi)d\xi - \frac{1}{W}\int_0^x y_2(x)y_1(\xi)f(\xi)d\xi,$$

которую можно записать в виде:

$$v(x) = \int_0^l G(x,\xi)f(\xi)d\xi, \tag{8}$$

где

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -y_1(x)y_2(\xi) & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant l, \\ -y_1(\xi)y_2(x) & \text{при} \quad 0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{9}$$

Перечислим основные свойства функции Грина $G(x,\xi)$.

1. Функция G является симметричной: $G(x,\xi) = G(\xi,x)$.

2. Функция G непрерывна по $(x,\xi) \in [0,l]^2$.

3. Функция G дважды непрерывно дифференцируема по x при $x \neq \xi$ и удовлетворяет уравнению:
$$L_x G(x,\xi) = 0 \text{ при } x \neq \xi.$$

4. Первая производная $\dfrac{\partial}{\partial x} G(x,\xi)$ при $x = \xi$ имеет разрыв первого рода, причем скачок равен -1:
$$\frac{\partial}{\partial x} G(\xi + 0, \xi) - \frac{\partial}{\partial x} G(\xi - 0, \xi) = -1.$$
Здесь стоит определител Вронского! Действительно:
$$-\frac{y_2'(\xi}{y \ _1}(\xi)W + \frac{y_1'(\xi}{y \ _2}(\xi)W = -\frac{W}{W} = -1.$$

5. Выполнены граничные условия
$$G|_{x=0} = G|_{x=l} = 0.$$

6. Выполнено уравнение в смысле обобщенных функций:
$$L_x G(x,\xi) = \delta(x - \xi),$$
где $\delta(x)$ – функция Дирака.

Поэтому функция Грина является фундаментальным решением уравнения (2)