Содержание лекций по курсу геометрии-1
Матфак ВШЭ, осень 2014 - весна 2015

Модуль 1

Лекция 1 (4.09.2014). Геометрическая (то есть методами «школьной» геометрии) теория конических сечений: определение эллипса, гиперболы и параболы как соответствующих геометрических мест точек, их построение как конических сечений (рассуждение через шары Данделена), касательные как прямые, имеющие с коникой только одну общую точку, построение касательных к параболе, оптические свойства коник, конфокальные коники, перпендикулярность конфокальных коник.

Лекция 2 (8.09.2014). Аналитическая теория конических сечений: определение эллипса, гиперболы и параболы как кривых, заданных в некоторой прямоугольной декартовой системе координат соответствующими уравнениями, эквивалентность геометрическим определениям, асимптоты гиперболы, фокальный параметр как половина длины фокальной хорды, ортогональной большой оси, эксцентриситет, директрисы и директориальные свойства конических сечений, полярные координаты и уравнения конических сечений в удобных полярных кооординатах.

Лекция 3 (15.09.2014). Напоминание о построении векторов в «школьной» геометрии, скалярное произведение. Векторные пространства над полем, линейная зависимость и независимость, базис, координаты вектора, размерность пространства, линейные отображения и изоморфизмы, изоморфность конечномерных векторных пространств одинаковой размерности. Аффинные пространства, репер, координаты точки. Векторные подпространства и аффинные подпространства.

Лекция 4 (15.09.2014). Прямые как аффинные подпространства размерности 1, вывод из этого определения параметрического и канонического уравнения. Плоские алгебраические кривые, прямые как алгебраические кривые степени 1. Плоскости как аффинные подпространства размерности 2, вывод из этого определения параметрического уравнения плоскости. Плоскости в трёхмерном пространстве как решения уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$. Симметрические билинейные формы. Положительная определённость. Евклидово скалярное произведение, ортогональные и ортонормированные базисы, формула для скалярного произведения через координаты в ортонормированном базисе. Длина вектора и угол между векторами.

Лекция 5 (22.09.2014). Евклидово скалярное произведение. Ориентированная площадь параллелограмма и ориентация в плоскости. Ориентация как выбор класса эквивалентности базисов в плоскости и пространстве. Векторное произведение и смешанное произведение, связь с ориентированным объёмом, основные свойства.

Лекция 6 (29.09.2014). Векторное произведение и смешанное произведение: явные формулы в координатах. Тождество «бац-цаб» и тождество Якоби. Понятие об алгебрах Ли, связь векторного произведения с алгеброй Ли $\mathfrak{so}(3)$. Деление отрезка в данном отношении. Прямые в аффинном пространстве как одномерные аффинные подпространства, параметрическое уравнение прямой, аксиомы планиметрии о прямых как теоремы в таком подходе. Прямые в плоскости, общее уравнение прямой $Ax+By+C = 0$. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Полуплоскости.

Лекция 7 (29.09.2014). Собственный и несобственный пучок прямых на плоскости. Прямые в евклидовой плоскости: вектор нормали, угол между прямыми, расстояние от точки до прямой. Плоскости в аффинном пространстве как двумерные аффинные подпространства, параметрическое задание плоскости, аксиомы стереометрии о плоскостях как теоремы в таком подходе. Обобщение: k-мерные плоскости в $\mathbb{A}^n$. Плоскости в трехмерном аффинном пространстве, общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Полупространства. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве.

Лекция 8 (6.10.2014). Пучок и связка плоскостей. Плоскости в евклидовом пространстве: расстояние от точки до плоскости, угол между плоскостями. Прямые в трёхмерном пространстве: способы задания, расстояние от точки до прямой в пространстве, угол между прямой и плоскостью, угол между двумя прямыми, расстояние между скрещивающимися прямыми. Замена базиса, замена координат, матрица перехода. Ортогональные матрицы, группы $O(n)$ и $SO(n)$. Явное описание ортогональных матриц размера 2×2.

Лекция 9 (13.10.2014). Углы Эйлера. Кватернионы. Параметризация $SO(3)$ через кватернионы единичной длины, теорема Кэли-Клейна (без доказательства того, что каждая матрица из $SO(3)$ представима в таком виде).

Лекция 10 (13.10.2014). Плоские кривые второй степени, квадрики. Приведение квадрик к каноническому виду ортогональными преобразованиями. Ортогональные инварианты квадрик.

Лекция 11 (20.10.2014). Ортогональные инварианты квадрик (продолжение). Классификация квадрик с точностью до ортогональных преобразований. Проективная плоскость, однородные и неоднородные координаты, точки и прямые в проективной плоскости, абсолют (бесконечно удаленная прямая), квадрики в проективной плоскости.

Модуль 2

Лекция 12 (10.11.2014). Проективное пространство, аффинные карты, однородные и неоднородные координаты. Точки, прямые и k-мерные плоскости в проективном пространстве. Задание гиперплоскости проективного пространства однородным линейным уравнением. Абсолют. Двойственное проективное пространство, проективная двойственность.

Лекция 13 (10.11.2014). Проективные координаты, фундаментальные точки и единичная точка. Группа проективных преобразований. Связь дробно-линейных преобразований прямой и проективных преобразований проективной прямой. Эрлангенская программа Клейна на примере евклидовой, аффинной и проективной геометрий, а также геометрии подобия. Ангармоническое отношение четырех точек, лежащих на одной прямой, как инвариант группы проективных преобразований. Формулировки теорем Дезарга, Паппа и Фано.

Лекция 14 (17.11.2014). Аффинные преобразования как проективные преобразования, сохраняющие абсолют. Однородные многочлены и алгебраические гиперповерхности в проективных пространствах. Аффинная часть проективной гиперповерхности и проективизация аффинной гиперповерхности. Квадратичные формы, поляризация квадратичной формы. Квадрики, преобразование уравнения квадрики при замене координат. Квадрики в проективной плоскости. Параметрическое уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Касательная к плоской проективной квадрике. Касательная к плоской аффинной квадрике. Степень пересечения прямой и проективной алгебраической кривой. Касательные в особой точке вырожденной квадрики. Двойственная квадрика. Поляритет: полюс, поляра, связи с проективной двойственностью.

Лекция 15 (24.11.2014). Распадающиеся кривые, разложение квадрики на множители. Единственность квадрики, проходящей через пять точек, никакие четыре из которых не лежат на одной прямой. Единственность с точностью до пропорциональности уравнения квадрики, содержащей более одной точки. Пучок квадрик, линейные свойства, примеры решения задач с помощью пучка квадрик. Кубики, пучки кубик.

Лекция 16 (24.11.2014). Теорема Паскаля для коник, обратная теорема Паскаля. Теорема Паскаля для вырожденных квадрик: теорема Паппа. Вырождения: касательная вместо стороны шестивершинника. Теорема Брианшона как двойственная к теореме Паскаля. Асимптотические направления. Диаметр, сопряженный неасимптотическому направлению. Центр как точка пересечения диаметров и как полюс абсолюта.

Лекция 17 (01.12.2014). Центр симметрии квадрики и его связь с центром, определённым как полюс абсолюта. Сопряжённые направления и сопряжённые диаметры. Оси симметрии, главные оси. Собственные векторы и собственные числа матрицы, характеристический многочлен. Приведение квадрики к каноническому виду.

Лекция 18 (08.12.2014). Круговые точки $I = (1 : i : 0)$ и $J = (1 : -i : 0)$, изотропные прямые, фокусы как точки пересечения изотропных касательных. Проективная классификация квадрик. Рациональная параметризация квадрик. Применение к решению диофантовых уравнений на примере пифагоровых троек.

Лекция 19 (15.12.2014). Билинейные и полуторалинейные функции (формы), пространства билинейных и полуторалинейных форм $\Phi_2(V)$ и $\tilde{\Phi}_2(V)$. Матрица билинейной (полуторалинейной) формы в данном базисе. Естественный изоморфизм $\Phi_2(V) \cong \mathrm{Hom}(V, V^*)$. Правое и левое ядро билинейной (полуторалинейной) формы, совпадение их размерностей. Невырожденные формы. Симметрические, кососимметрические и эрмитовы формы, совпадение у них правого и левого ядра. Представление любой билинейной формы в виде суммы симметрической и кососимметрической формы и его единственность. Ортогональность относительно симметрической, кососимметрической или эрмитовой формы. Ортогональное дополнение к подпространству.

Модуль 3

Лекция 20 (12.01.2015). Напоминание содержания предыдущей лекции. Преобразование матриц билинейных и полуторалинейных форм при замене базиса. Ранг билинейной (полуторалинейной) формы. Ортогональность относительно заданной симметрической, кососимметрической или эрмитовой формы, свойства ортогонального дополнения. Критерий представления пространства в виде прямой суммы подпространства и его ортогонального дополнения. Теорема о нормальной форме симметрической билинейной формы. Теорема о нормальной форме эрмитовой полуторалинейной формы. Теорема о нормальной форме кососимметрической билинейной формы. Положительный и отрицательный индексы инерции, сигнатура симметрической билинейной формы. Закон инерции. Квадратичные формы и симметрические билинейные формы. Алгоритм приведения симметрической билинейной формы к нормальному виду через приведение соответствующей квадратичной формы методом Лагранжа выделения полных квадратов.

Лекция 21 (19.01.2015). Квадратичные формы и симметрические билинейные формы. Алгоритм приведения симметрической билинейной формы к нормальному виду через приведение соответствующей квадратичной формы методом Лагранжа выделения полных квадратов. Внешнее произведение пары ковекторов, базис $\varepsilon^i \wedge \varepsilon^j$, $i < j$, в пространстве кососимметрических билинейных форм. Алгоритм приведения кососимметрической билинейной формы к нормальному виду. Алгоритм приведения эрмитовой формы к нормальному виду. Связь приведения симметрических билинейных форм к нормальной форме и классификации проективных квадрик на примере квадрик в вещественной и комплексной проективных плоскостях и вещественном проективном пространстве.

Лекция 22 (19.01.2015). Евклидовы, псевдоевклидовы, эрмитовы, псевдоэрмитовы и симплектические скалярные произведения. Евклидовы, псевдоевклидовы, унитарные, псевдоунитарные и симплектические пространства. Пространства $\mathbb{R}^n_q$ и $\mathbb{C}^n_q$. Матрица Грама скалярного произведения. Невырожденность ограничения евклидова скалярного произведения на подпространство. Изотропные вектора, изотропные конусы и изотропные подпространства псевдоевклидовых и псевдоэрмитовых пространств. Критерий Сильвестра положительной определённости скалярного произведения. Ортогональные и псевдоортогональные матрицы. Явная параметризация элементов группы $O(1,1)$. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта в евклидовых пространствах.

Лекция 23 (26.01.2015). Естественный изоморфизм $\tau : V \longrightarrow V^*$ (псевдо)евклидова, (псевдо)унитарного или симплектического пространтства V и его двойственного V^* (только в (псевдо)унитарном случае $\tau(\lambda v) = \bar{\lambda} v$). Изотропность ортогонального дополнения к изотропному подпространству. Сопряжённые направления невырожденной квадрики как векторы, ортогональные относительно скалярного произведения, заданного её квадратичной частью. Асимптотические направления невырожденной квадрики как изотропные векторы скалярного произведения, заданного её квадратичной частью. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта в псевдоевклидовых и псевдоунитарных пространствах, достаточное условие осуществимости процесса ортогонализации. Теорема Якоби. Угол между подпространствами в евклидовом пространстве. Неравенство Коши-Буняковского в унитарном пространстве. Угол между векторами в унитарном пространстве. Унитарные и псевдоунитарные матрицы. Овеществление $V^{\mathbb{R}}$ комплексного векторного пространства V. Построение базиса в $V^{\mathbb{R}}$ по базису V, равенство $\dim_{\mathbb{R}} V^{\mathbb{R}} = 2\dim_{\mathbb{C}} V$. Теорема о том, что если $(\, , \,)$ — эрмитово скалярное произведение на унитарном пространстве V, то $\mathrm{Re}(\, , \,)$ и $\mathrm{Im}(\, , \,)$ являются евклидовым и симплектическим скалярным произведением на $V^{\mathbb{R}}$.

Лекция 24 (02.02.2015). QR-разложение для невырожденных матриц. Теорема о том, что угол между вектором и подпространством равен углу между вектором и его проекцией на подпространство. Евклидово аффинное пространство. Расстояние между точками. Теорема о расстоянии между точкой и аффинным подпространством. Теорема о расстоянии между двумя аффинными подпространствами. Метод наименьших квадратов. Сопряжённый оператор в евклидовом (унитарном) пространстве. Утверждение о том, что если $W \subset V$ инвариантно относительно оператора A, определённого на евклидовом (унитарном) пространстве V, то $W^{\perp}$ инвариантно относительно A^*. Ортогональные и унитарные операторы. Утверждение о том, что модуль собственных чисел ортогонального (унитарного) оператора равен 1. Лемма о том, что вещественный оператор имеет инвариантное подпространство размерности 1 или 2. Теорема о каноническом виде унитарного оператора. Теорема о каноническом виде ортогонального оператора.

Лекция 25 (02.02.2015). Самосопряжённые операторы. Вещественность собственных чисел самосопряжённого оператора. Ортогональность собственных векторов самосопряжённого оператора, соответствующих разным собственным числам. Теорема о диагонализации самосопряжённого оператора. Проектор на подпространство. Теорема о том, что оператор P является проектором тогда и только тогда, когда $P^2 = P$. Ортогональные проекторы. Теорема о том, что проектор ортогонален тогда и только тогда, когда он самосопряжён. Теорема о спектральном разложении самосопряжённого оператора. Кососимметрические и косоэрмитовы операторы. Теорема о каноническом виде косоэрмитова оператора. Теорема о каноническом виде кососимметрического оператора. Эрмитово разложение оператора в унитарном пространстве. Положительные самосопряжённые операторы. Квадратный корень из положительного самосопряжённого оператора. Теорема о полярном разложении невырожденного оператора в евклидовом (унитарном) пространстве. Самосопряжённые операторы и симметрические билинейные (эрмитовы полуторалинейные) формы. Теорема о приведении симметрической билинейной (эрмитовой полуторалинейной) формы к каноническому виду ортогональным (унитарным) преобразованием. Теорема о приведении к каноническому виду пары симметрических билинейных форм, одна из которых положительно определена.

Лекция 26 (09.02.2015). Собственные числа и собственные векторы пары квадратичных форм. Вычисление угла между подпространствами через собственные числа пары квадратичных форм. Вариационное описание собственных чисел самосопряжённого оператора. Приведение поверхностей второго порядка к каноническому виду ортогональными преобразованиями трёхмерного евклидова аффинного пространства (то, что разные типы поверхностей различаются инвариантами — без доказательства). Центр поверхности второго порядка. Алгоритм приведения поверхности второго порядка к каноническому виду.

Лекция 27 (16.02.2015). Сечение поверхности плоскостью: проекции сечения на координатные плоскости, нахождение уравнения сечения с помощью ортогональной замены координат. Параметрическое и алгебраическое уравнение тора вращения. Окружности Вилларсо как сечения тора вращения бикасательной плоскостью. Свойства окружностей Вилларсо (без доказательства). Эллипсоид, его фокальные эллипс и гипербола, теорема Штауде о построении эллипсоида при помощи нити (без доказательства). Однополостный гиперболоид: асимптотический конус, прямолинейные образующие. Двуполостный гиперболоид: асимптотический конус.

Лекция 28 (16.02.2015). Эллиптический параболоид. Прямолинейные образующие и асимптотические направления. Гиперболический параболоид: прямолинейные образующие. Конусы и цилиндры. Окончание доказательства теоремы о приведении поверхностей второго порядка к каноническому виду ортогональными преобразованиями: различение разных типов поверхностей геометрическими методами. Неособые точки. Касательные прямые и касательные плоскости к поверхности второго порядка. Доказательство теоремы Брианшона с помощью прямолинейных образующих однополостного гиперболоида.

Лекция 29 (2.03.2015). Сферическая геометрия. Большие окружности — прямые сферической геометрии, расстояние между точками, неравенство треугольника, группа движений (изометрий) сферы, утверждение о том, что для любых точек A, A' и любых прямых $l \ni A$, $l' \ni A'$ существует изометрия, переводящая A в A' и l в l'. Полярное соответствие, полярные треугольники, формула для площади сферического треугольника, угловой избыток.

Лекция 30 (2.03.2015). Геометрия Лобачевского (гиперболическая геометрия). Модель Клейна плоскости Лобачевского. Прямые, расстояние между точками, неравенство треугольника. Модель Пуанкаре в круге плоскости Лобачевского. Переход от модели Клейна к модели Пуанкаре в круге. Расстояние между точками в модели Пуанкаре в круге (без доказательства используется то, что стереографическая проекция сохраняет ангармоническое (двойное) отношение четырёх точек). Отображение $z \mapsto i\dfrac{1+z}{1-z}$ и его свойства. Модель Пуанкаре в верней полуплоскости плоскости Лобачевского, прямые, расстояние между точками (без доказательства используется то, что дробно-рациональные отображения комплексной плоскости переводят окружности или прямые в окружности или прямые). Группа движений (изометрий) плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости (без доказательства). Идея введения углов в геометрии Лобачевского исходя из группы изометрий. Утверждение о том, что для любых точек A, A' и любых прямых $l \ni A$,

$l' \ni A'$ существует изометрия, переводящая A в A' и l в l' (без доказательства).