Задачи для семинара № 20
Геометрия-1
Матфак ВШЭ, осень 2014 - весна 2015

Сферы

Задача 1. Рассмотрим сферу $\mathbb{S} = \mathbb{S}_r(a)$ радиуса r с центром в точке a евклидова пространства $\mathbb{E}^n$ и точку $x \in \mathbb{E}^n$. Докажите, что для любой прямой, проходящей через x и пересекающей $\mathbb{S}$ в точках t, t' (возможно, совпадающих), скалярное произведение $(\overrightarrow{xt}, \overrightarrow{xt'})$ равно $|xa|^2 - r^2$, то есть не зависит от прямой. Это число называется степенью точки x относительно сферы $\mathbb{S}$, обозначим его через $P_x\mathbb{S}$. От чего зависит знак $P_x\mathbb{S}$? Как вычислить $P_x\mathbb{S}$ по координатам x и уравнению $\mathbb{S}$?

Задача 2. Пусть даны две неконцентрические сферы $\mathbb{S} = \mathbb{S}_r(a)$ и $\mathbb{S}' = \mathbb{S}_{r'}(a')$. Докажите, что множество точек x, таких, что $P_x\mathbb{S} = P_x\mathbb{S}'$ является гиперплоскостью, ортогональной aa'. Она называется радикальной гиперплоскостью сфер $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S}'$. Как построить радикальную прямую для двух окружностей с помощью циркуля и линейки? *Указание: рассмотрите произвольную окружность, пересекающую и* $\mathbb{S}$, *и* $\mathbb{S}'$ *по двум точкам.*

Задача 3. Будем говорить, что две сферы $\mathbb{S} = \mathbb{S}_r(a)$ и $\mathbb{S}' = \mathbb{S}_{r'}(a')$ ортогональны, если для любой точки $x \in \mathbb{S} \cap \mathbb{S}'$ векторы ($\overrightarrow{xa}$ и $\overrightarrow{xa'}$) ортогональны. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны: а) $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S}'$ ортогональны, б) $|aa'|^2 = r^2 + (r')^2$, в) $P_a\mathbb{S}' = r^2$, г) $P_{a'}\mathbb{S} = (r')^2$, д) существует прямая, пересекающая $\mathbb{S}$ в точках x, x' и $\mathbb{S}'$ в точках t, t', таких, что $[x, x', t, t'] = -1$.

Задача 4. Докажите, что центр сферы, ортогональной двум данным сферам, лежит на их радикальной гиперплоскости.

Задача 5. Построить с помощью циркуля и линейки окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности. *Указание: используйте степень точки относительно окружности.*

Задача 6. Назовём инверсией с полюсом в точке c и степени $\alpha \in \mathbb{R}^*$ отображение $i = i_{c,\alpha} : \mathbb{E}^n \setminus \{c\} \longrightarrow \mathbb{E}^n \setminus \{c\}$, заданное соотношением $i(x) = c + \frac{\alpha}{|cx|^2}\overrightarrow{cx}$. Докажите, что квадрат инверсии — тождественное отображение $\mathbb{E}^n \setminus \{c\}$, а неподвижные точки образуют сферу $\mathbb{S} = \mathbb{S}_{\sqrt{\alpha}}c$, называемую сферой инверсии. Докажите, что сферы $\mathbb{S}$, для которых $P_c\mathbb{S} = \alpha$, инвариантны относительно $i_{c,\alpha}$. Докажите, что также инвариантны любые множества вида $Y \setminus \{c\}$, где Y — аффинное подпространство, содержащее c.

Задача 7. Докажите, что при инверсии $i_{c,\alpha}$ образом любой аффинной гиперплоскости $H \subset \mathbb{E}^n$, не содержащей точки c, является множество $\mathbb{S} \setminus \{c\}$, где $\mathbb{S}$ — некоторая сфера, проходящая через точку c. Докажите, что образом при инверсии $i_{c,\alpha}$ множества $\mathbb{S} \setminus \{c\}$, где $\mathbb{S}$ — некоторая сфера, проходящая через точку c, является гиперплоскость, не содержащая точки c. Докажите, что образом при инверсии $i_{c,\alpha}$ сферы, не содержащей точку c, является сфера, не содержащая точки c.

Задача 8. Докажите, что стереографическая проекция из точки сферы на гиперплоскость, касательную в антиподальной точке, является ограничением на сферу некоторой инверсии.

Задача 9. Докажите, что инверсия переводит ортогональные гиперплоскости и сферы в ортогональные.

Задача 10*. Докажите, что инверсия сохраняет углы.