

Задачи для семинара № 21
Геометрия-1
Матфак ВШЭ, осень 2014 - весна 2015

Сферическая геометрия и геометрия Лобачевского
(гиперболическая геометрия)

Задача 1. Доказать, что для сферического треугольника с длинами сторон a, b, c имеют место неравенства

$$a + b > c, \quad a + b + c < 2\pi R,$$

где R — радиус сферы.

Задача 2. Найти углы автополярного треугольника, то есть сферического треугольника, совпадающего с полярным к нему треугольником.

Задача 3. С помощью циркуля и линейки построить середину данного отрезка в модели Клейна плоскости Лобачевского.

Задача 4. Найти длину стороны правильного сферического треугольника, вписанного в сферическую окружность радиуса r .

Задача 5. Доказать, что медианы гиперболического треугольника пересекаются в одной точке. Всегда ли медианы треугольника делятся своей точкой пересечения в одном и том же отношении?

Задача 6. С помощью циркуля и линейки соединить данную точку с данной прямой кратчайшим отрезком (то есть опустить перпендикуляр) в модели Клейна плоскости Лобачевского.

Задача 7. Докажите гиперболическую теорему Пифагора для геометрии Лобачевского: для треугольника с прямым углом γ выполнено соотношение $\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$.

Задача 8. Дан евклидов и гиперболический треугольники ABC и $A'B'C'$ с одинаковыми соответствующими сторонами. Доказать, что медиана AM длинее, чем медиана $A'M'$.

Задача 9. Доказать, что для сферического треугольника с длинами сторон a, b, c и углами α, β, γ на сфере радиуса 1 имеют место следующие соотношения:

- $\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$ (теорема синусов)
- $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$ (первая теорема косинусов)
- $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$ (вторая теорема косинусов)

Задача 10. Докажите для геометрии Лобачевского, сферической геометрии и евклидовой геометрии теорему синусов:

$$\frac{l(a)}{\sin \alpha} = \frac{l(b)}{\sin \beta} = \frac{l(c)}{\sin \gamma},$$

где $l(r)$ — длина окружности радиуса r в соответствующей геометрии.