Уравнения в частных производных

Программа экзамена за 3 модуль 20 марта 2015 г.

1. Вывести уравнение упругих поперечных колебаний струны. Вывести уравнение распространения тепла. Вывести стационарное уравнение для потенциального безвихревого течения жидкости. [1, § 1.2], [3, Лекция 1], [4, §§ 2.1, 6.1], [5, § 2.1].

2. Классификация квазилинейных уравнение с частными производными второго порядка. Главный часть уравнения, ее преобразования при замене независимых переменных. Классификация уравнений в точке. Основные типы уравнений второго порядка. Характеристические поверхности. [1, § 1.3], [2, § 2], [3, Лекция 3].

3. Постановка основных краевых задач для квазилинейных уравнений второго порядка. Привести классификацию краевых задач: задача Коши для эволюционных уравнений, краевые задачи для уравнений эллиптического типа, смешанные задачи для уравнения колебаний и для уравнения диффузии. Определение корректной краевой задачи. Пример Адамара. Задача Коши для уравнения типа Ковалевской. Сформулировать теорему Коши–Ковалевской. [1, § 1.4], [3, Лекция 4].

4. Вывести формулу для общего решения уравнения свободных упругих колебаний струны в выпуклой области по (x, t). Вывести формулу Даламбера для классического решения задачи Коши для уравнения колебаний струны на всей прямой. Доказать теорему существования и единственности классического решения для этой задачи. Установить корректность задачи в соответствующих пространствах. Дать геометрическую интерпретацию формулы Даламбера: конечная область зависимости решения от начальных данных, конечная скорость распространения возмущений, бегущие волны. [2, §§ 3, 4], [3, Лекция 4], [4, § 2.2].

5. Обосновать формулу решения задачи Коши для неоднородного уравнения колебаний струны на всей прямой. Вывести формулу для решения задачи Коши для однородного уравнения колебаний струны на полупрямой. Рассмотреть первую и вторую краевую задачи. Доказать единственность этого решения. [2, § 5], [3, Лекция 5].

6. Продемонстрировать метод Фурье для построения классического решения первой краевой задачи для уравнения свободных колебаний струны с закрепленными концами. Доказать теорему о существовании и единственности решения этой задачи при гладких финитных начальных данных $\varphi(x), \psi(x)$. [2, § 6], [3, Лекция 6].

7. Решить методом Фурье первую краевую задачу для неоднородного уравнения струны. Доказать теорему о существовании и единственности классического решения этой задачи при гладкой финитной функции $f(x, t)$. [2, § 7], [3, Лекция 6].

8. Доказать теорему об энергетической оценке классического решения первой краевой задачи уравнения колебаний струны на отрезке. Доказать корректность этой задачи в соответствующих пространствах. [2, § 8].

9. Обобщенные решения для уравнения колебаний струны. Требования для класса обобщенных решений. Построение класса обобщенных решений с помощью формулы Даламбера для непрерывных начальных данных. Построение класса обобщенных решений с помощью предельного перехода на примере формулы Даламбера. Доказать теорему о существовании обобщенного решения метода предельного перехода для

первой краевой задачи уравнения свободных колебаний струны на конечном отрезке. Обобщенное решение уравнения струны, определяемое с помощью интегрального тождества. Доказать теорему существования обобщенного решения для неоднородного уравнения струны. Доказать теорему единственности обобщенного решения для неоднородного уравнения струны. [2, § 9].

10. Задача Штурма–Лиувилля. Доказать основные свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма–Лиувилля: симметричность и положительность оператора, ортогональность собственных функций, однократность собственных значений. Построить функцию Грина задачи Штурма–Лиувилля и описать ее свойства. [4, §§ 3.1, 3.2, 3.4].

Список литературы

[1] Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2003.

[2] Ильин А.М. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2009.

[3] Байков В.А., Жибер А.В. Уравнения математической физики. – Ижевск: РХД, 2003.

[4] Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. – М.: МЦНМО, 2003.

[5] Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными.–М.:БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010.

Порядок проведения экзамена за 3 модуль

Экзамен проводится в письменной форме. Он будет состоять из двух частей: теоретической и практической. Теоретическая часть рассчитана на 1 час. Каждый студент получит билет из трех вопросов, взятых из разных пунктов приведенного выше списка. Необходимо достаточно подробно осветить каждый вопрос, привести относящиеся к нему определения, сформулировать требуемые свойства и теоремы, а также доказать их. Дополнительными материалами пользоваться не разрешается. Практическая часть будет проходить 2 часа. Каждый студент получит вариант с задачами, которые необходимо решить. Здесь разрешается пользоваться дополнительными рукописными материалами (записками лекций, семинаров и пр.) Оценка каждого студента будет определяться по результатам проверки письменной работы, с учетом решений задач из листков и участия в семинарах. В случае неудовлетворительного результата будет возможность переписать теоретическую или/и часть экзамена на пересдаче 27 марта 2015 г.