

Дискретная математика

Семинар 9

ВШЭ, факультет математики
первый курс, третий модуль

1. Дайте интерпретацию коэффициенту при $q^m s^n$ в бесконечном произведении $(1 + qs)(1 + qs^2)(1 + qs^3) \dots$.

2. Всякое число может быть единственным образом записано в десятичной системе счисления. Докажите, что

$$(1 + s + s^2 + \dots + s^9)(1 + s^{10} + \dots + s^{90})(1 + s^{100} + \dots + s^{900}) \dots = \frac{1}{1 - s}.$$

3. Найдите производящую функцию для числа симметричных (самосопряженных) разбиений.

4. Рассмотрим кольцо многочленов от бесконечного набора переменных, в котором переменным приписан натуральный вес, причем число переменных веса i конечно для любого i . Обозначим это число через q_i . Выпишите производящую функцию для последовательности размерностей пространств взвешенно однородных многочленов веса n . Разберите сначала случай $q_i = 1$ при всех i .

5. Докажите, что число разбиений числа n на части, не делящиеся на m , равно числу тех его разбиений, в которых ни одна часть не встречается более, чем $m - 1$ раз.

6. Докажите тождество Гаусса

$$\frac{(1 - s^2)(1 - s^4)(1 - s^6)}{(1 - s)(1 - s^3)(1 - s^5) \dots} = 1 + s + s^3 + s^6 + s^{10} + \dots$$