Программа экзамена по курсу геометрии-1
Матфак ВШЭ, третий модуль 2014-2015 учебного года

1. Билинейные и полуторалинейные формы. Преобразование матриц билинейных и полуторалинейных форм при замене базиса. Ранг билинейной (полуторалинейной) формы. Ортогональность относительно заданной симметрической, кососимметрической или эрмитовой формы, свойства ортогонального дополнения. Критерий представления пространства в виде прямой суммы подпространства и его ортогонального дополнения.

2. Теорема о нормальной форме симметрической билинейной формы. Теорема о нормальной форме эрмитовой полуторалинейной формы. Теорема о нормальной форме кососимметрической билинейной формы. Положительный и отрицательный индексы инерции, сигнатура симметрической билинейной формы. Закон инерции.

3. Квадратичные формы и симметрические билинейные формы. Алгоритм приведения симметрической билинейной формы к нормальному виду через приведение соответствующей квадратичной формы методом Лагранжа выделения полных квадратов.

4. Внешнее произведение пары ковекторов, базис $\varepsilon^i \wedge \varepsilon^j$, $i < j$, в пространстве кососимметрических билинейных форм. Алгоритм приведения кососимметрической билинейной формы к нормальному виду. Алгоритм приведения эрмитовой формы к нормальному виду.

5. Связь приведения симметрических билинейных форм к нормальной форме и классификации проективных квадрик на примере квадрик в вещественной и комплексной проективных плоскостях и вещественном проективном пространстве.

6. Евклидовы, псевдоевклидовы, эрмитовы, псевдоэрмитовы и симплектические скалярные произведения. Евклидовы, псевдоевклидовы, унитарные, псевдоунитарные и симплектические пространства. Пространства $\mathbb{R}^n_q$ и $\mathbb{C}^n_q$. Матрица Грама скалярного произведения. Невырожденность ограничения евклидова скалярного произведения на подпространство. Изотропные вектора, изотропные конусы и изотропные подпространства псевдоевклидовых и псевдоэрмитовых пространств.

7. Критерий Сильвестра положительной определённости скалярного произведения.

8. Ортогональные и псевдоортогональные матрицы. Явная параметризация элементов группы $O(1,1)$. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта в евклидовых пространствах.

9. Естественный изоморфизм $\tau : V \longrightarrow V^*$ (псевдо)евклидова, (псевдо)унитарного или симплектического пространтства V и его двойственного V^* (только в (псевдо)унитарном случае $\tau(\lambda v) = \bar{\lambda} v$). Изотропность ортогонального дополнения к изотропному подпространству. Сопряжённые направления невырожденной квадрики как векторы, ортогональные относительно скалярного произведения, заданного её квадратичной частью. Асимптотические направления невырожденной квадрики как изотропные векторы скалярного произведения, заданного её квадратичной частью.

10. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта в псевдоевклидовых и псевдоунитарных пространствах, достаточное условие осуществимости процесса ортогонализации. Теорема Якоби.

11. Угол между подпространствами в евклидовом пространстве. Неравенство Коши-Буняковского в унитарном пространстве. Угол между векторами в унитарном пространстве. Унитарные и псевдоунитарные матрицы. Овеществление $V^{\mathbb{R}}$ комплексного векторного пространства V. Построение базиса в $V^{\mathbb{R}}$ по базису V, равенство $\dim_{\mathbb{R}} V^{\mathbb{R}} = 2\dim_{\mathbb{C}} V$. Теорема о том, что если $(\, , \,)$ — эрмитово скалярное произведение на унитарном пространстве V, то $(\, , \,)$ и $(\, , \,)$ являются евклидовым и симплектическим скалярным произведением на $V^{\mathbb{R}}$.

12. QR-разложение для невырожденных матриц. Теорема о том, что угол между вектором и подпространством равен углу между вектором и его проекцией на подпространство.

13. Евклидово аффинное пространство. Расстояние между точками. Теорема о расстоянии между точкой и аффинным подпространством. Теорема о расстоянии между двумя аффинными подпространствами.

14. Сопряжённый оператор в евклидовом (унитарном) пространстве. Утверждение о том, что если $W \subset V$ инвариантно относительно оператора A, определённого на евклидовом (унитарном) пространстве V, то $W^{\perp}$ инвариантно относительно A^*. Ортогональные и унитарные операторы. Утверждение о том, что модуль собственных чисел ортогонального (унитарного) оператора равен 1.

15. Лемма о том, что вещественный оператор имеет инвариантное подпространство размерности 1 или 2. Теорема о каноническом виде унитарного оператора. Теорема о каноническом виде ортогонального оператора.

16. Самосопряжённые операторы. Вещественность собственных чисел самосопряжённого оператора. Ортогональность собственных векторов самосопряжённого оператора, соответствующих разным собственным числам. Теорема о диагонализации самосопряжённого оператора.

17. Проектор на подпространство. Теорема о том, что оператор P является проектором тогда и только тогда, когда $P^2 = P$. Ортогональные проекторы. Теорема о том, что проектор ортогонален тогда и только тогда, когда он самосопряжён. Теорема о спектральном разложении самосопряжённого оператора.

18. Кососимметрические и косоэрмитовы операторы. Теорема о каноническом виде косоэрмитова оператора. Теорема о каноническом виде кососимметрического оператора. Эрмитово разложение оператора в унитарном пространстве.

19. Положительные самосопряжённые операторы. Квадратный корень из положительного самосопряжённого оператора. Теорема о полярном разложении невырожденного оператора в евклидовом (унитарном) пространстве.

20. Самосопряжённые операторы и симметрические билинейные (эрмитовы полуторалинейные) формы. Теорема о приведении симметрической билинейной (эрмитовой полуторалинейной) формы к каноническому виду ортогональным (унитарным) преобразованием. Теорема о приведении к

каноническому виду пары симметрических билинейных форм, одна из которых положительно определена.

21. Собственные числа и собственные векторы пары квадратичных форм. Вычисление угла между подпространствами через собственные числа пары квадратичных форм.

22. Приведение поверхностей второго порядка к каноническому виду ортогональными преобразованиями трёхмерного евклидова аффинного пространства. Центр поверхности второго порядка. Алгоритм приведения поверхности второго порядка к каноническому виду.

23. Сечение поверхности плоскостью: проекции сечения на координатные плоскости, нахождение уравнения сечения с помощью ортогональной замены координат.

24. Параметрическое и алгебраическое уравнение тора вращения. Окружности Вилларсо как сечения тора вращения бикасательной плоскостью. Свойства окружностей Вилларсо (без доказательства).

25. Эллипсоид, его фокальные эллипс и гипербола, теорема Штауде о построении эллипсоида при помощи нити (без доказательства).

26. Однополостный гиперболоид: асимптотический конус, прямолинейные образующие. Двуполостный гиперболоид: асимптотический конус.

27. Эллиптический параболоид. Прямолинейные образующие и асимптотические направления.

28. Гиперболический параболоид: прямолинейные образующие. Конусы и цилиндры.

29. Неособые точки. Касательные прямые и касательные плоскости к поверхности второго порядка.

30. Доказательство теоремы Брианшона с помощью прямолинейных образующих однополостного гиперболоида.

31. Сферическая геометрия. Большие окружности — прямые сферической геометрии, расстояние между точками, неравенство треугольника, группа движений (изометрий) сферы, утверждение о том, что для любых точек A, A' и любых прямых $l \ni A$, $l' \ni A'$ существует изометрия, переводящая A в A' и l в l'. Полярное соответствие, полярные треугольники, формула для площади сферического треугольника, угловой избыток.

32. Модель Клейна плоскости Лобачевского. Прямые, расстояние между точками, неравенство треугольника.

33. Модель Пуанкаре в круге плоскости Лобачевского. Переход от модели Клейна к модели Пуанкаре в круге. Расстояние между точками в модели Пуанкаре в круге (без доказательства используется то, что стереографическая проекция сохраняет ангармоническое (двойное) отношение четырёх точек).

34. Отображение $z \mapsto i\dfrac{1+z}{1-z}$ и его свойства. Модель Пуанкаре в верней полуплоскости плоскости Лобачевского, прямые, расстояние между точками

(без доказательства используется то, что дробно-рациональные отображения комплексной плоскости переводят окружности или прямые в окружности или прямые). Группа движений (изометрий) плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости (без доказательства). Идея введения углов в геометрии Лобачевского исходя из группы изометрий. Утверждение о том, что для любых точек A, A' и любых прямых $l \ni A$, $l' \ni A'$ существует изометрия, переводящая A в A' и l в l' (без доказательства).