

**Контрольная № 9**  
**Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014 - весна 2015**

**Вариант 1**

**Задача 1.** Найти угол между подпространствами

$$U = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle, \quad W = \langle (2, 3, 1, 6), (1, -1, -7, -7) \rangle$$

евклидова пространства  $\mathbb{R}^4$  со стандартным скалярным произведением.

**Задача 2.** Найти центр и полуоси эллипса, лежащего в сечении эллипсоида

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$$

плоскостью

$$x + z + \frac{4\sqrt{5}}{3} = 0.$$

**Задача 3.** Найти прямолинейные образующие поверхности

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - yz + 4x + 3y - 5z + 4 = 0,$$

проходящие через точку  $(-1, -1, 1)$ .

**Задача 4.** Дана точка в модели Клейна. Как с помощью циркуля и линейки построить отвечающую ей точку в модели Пуанкаре в круге?

**Задача 5.** Найти гиперболическое расстояние между точками  $i$  и  $2i$  в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости.

**Контрольная № 9**  
**Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014 - весна 2015**

**Вариант 2**

**Задача 1.** Определить тип поверхности, её каноническое уравнение и каноническую систему координат:

$$2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0.$$

**Задача 2.** По какой линии однополостный гиперболоид пересекается касательной плоскостью к его асимптотическому конусу?

**Задача 3.** Дан гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 2z.$$

Через его образующую

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{0}$$

и точку  $(1, 1, 1)$  проведена плоскость. Найти вторую прямую линию пересечения параболоида с этой плоскостью.

**Задача 4.** У каждого ли сферического треугольника существует вписанная окружность?

**Задача 5.** Как построить с помощью циркуля и линейки биссектрису угла гиперболического треугольника в модели Пуанкаре в круге?

**Контрольная № 9**  
**Геометрия-1. Матфак ВШЭ, осень 2014 - весна 2015**

**Вариант 3**

**Задача 1.** Для данной пары квадратичных форм выяснить, какая из них положительно определена, и найти линейное преобразование координат, приводящее положительно определённую форму к нормальному виду, а другую форму к каноническому виду:

$$f = (x^1)^2 - 3(x^2)^2 - 2(x^3)^2 + 2x^2x^3,$$
$$g = (x^1)^2 + 5(x^2)^2 + 2(x^3)^2 - 4x^1x^2 - 2x^2x^3.$$

**Задача 2.** Найти все значения  $k$ , при которых плоскость

$$2x + y + 2 + k(y + z) = 0$$

пересекает конус

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

по эллипсу.

**Задача 3.** Написать уравнение касательной плоскости к эллиптическому параболоиду

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,$$

проходящей через точки  $(p, 0, 0)$  и  $(0, q, 0)$ .

**Задача 4.** Доказать, что точке  $z \in \mathbb{C}$  в модели Пуанкаре в единичном круге соответствует точка

$$\frac{2z}{|z|^2 + 1}$$

в модели Клейна.

**Задача 5.** Существует ли сферический треугольник с тремя прямыми углами?