Задачи для семинара № 22
Геометрия-1
Матфак ВШЭ, осень 2014 - весна 2015

Геометрия трёхмерных сфер и окружности Вилларсо

Рассмотрим трёхмерную сферу единичного радиуса $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$. Пусть x, y, z, t — координаты в $\mathbb{R}^4$, а $u = x+iy$, $v = z+it$ — соответствующие координаты в $\mathbb{C}^2$. Обозначим через $d(p,q)$ сферическое расстояние между точками p и q на сфере, то есть угол между соответствующими радиус-векторами.

Задача 1. Докажите, что $\cos d((u_1,v_1),(u_2,v_2)) = \mathrm{Re}(u_1\bar{u}_2 + v_1\bar{v}_2)$.

Задача 2. Рассмотрим два действия группы $\mathbb{R}$ на $\mathbb{S}^3$, заданные формулой $t\cdot(u,v) = (e^{it}u, e^{\pm it}v)$. Доказать, что а) орбиты этих действий - большие окружности сферы; б) эти два действия изометричны, то есть сохраняют расстояние между точками; в) если C и C' две орбиты первого (или второго) действия, то для любых точек $n,m \in C$ верно равенство $d(n,C') = d(m,C') = d(C,C')$; г) если для $m \in C$ и $m' \in C'$ верно $d(m,m') = d(C,C')$, то большая окружность, проходящая через m и m', пересекает C и C' под прямым углом.

Это приводит нас к следующему определению: две большие окружности C и C' сферы $\mathbb{S}^3$ называются параллельными в смысле Клиффорда (обозначается $C \parallel C'$), если расстояние $d(m,C')$ от точки $m \in C$ до C' не зависит от выбора точки m.

Пусть C большая окружность, обозначим тогда через $\bar{C}$ плоскость, такую, что $C = \bar{C} \cap \mathbb{S}^3$, а через $C^\perp$ большую окружность $\bar{C}^\perp \cap \mathbb{S}^3$.

Задача 3. Рассмотрим множество $C_\alpha = \{n \in \mathbb{S}^3 | d(n,C) = \alpha\}$. Доказать, что $C_0 = C$, $C_{\frac{\pi}{2}} = C^\perp$, $C_{\pi-\alpha} = C_\alpha$, $C_{\frac{\pi}{2}-\alpha} = C^\perp_\alpha$. Доказать, что при $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ множество C_α представляет из себя тор. (Указание: достаточно рассмотреть большую окружность $v = 0$.)

Задача 4. Доказать, что для любой большой окружности C, любого значения $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ и любой точки $m \in C_\alpha$ найдутся ровно две большие окружности C' и C'', проходящие через m и параллельные C в смысле Клиффорда. Выведите отсюда, что отношение параллельности в смысле Клиффорда не транзитивно: $C' \parallel C$, $C'' \parallel C$, но $C' \nparallel C''$. (Указание: достаточно рассмотреть удобную большую окружность C и точку m.)

Для любой большой окружности C определим две подругуппы $G^\pm_C$ группы изометрий сферы следующим образом. Если C' — большая окружность $v = 0$, то $G^\pm_{C'}$ — это подгруппы из элементов группы изометрий $\{(u,v) \mapsto (e^{it}u, e^{\pm it}v) | t \in \mathbb{R}\}$. Для произвольной большой окружности C существует изометрия T, переводящая C в C', тогда $G^\pm_C = T^{-1} \circ G^\pm_{C'} \circ T$. Изометрия T не единственна, но легко проверить, что от её выбора ничего не зависит.

Теперь мы можем дать следующее определение: большие окружности C и C' называются параллельными в первом (или втором) смысле (обозначается $C \overset{+}{\parallel} C'$ или $C \overset{-}{\parallel} C'$ соответственно), если C' является орбитой группы G^+_C (или G^-_C).

Задача 5. Доказать, что а) $\overset{+}{\parallel}$ и $\overset{-}{\parallel}$ являются отношениями эквивалентности; б) если $C \parallel C'$, то или $C \overset{+}{\parallel} C'$, или $C \overset{-}{\parallel} C'$; в) через каждую точку $m \in \mathbb{S}^3$ проходят две больших окружности, параллельных C, одна параллельна в первом смысле, а другая — во втором, причём они различны, если $m \notin C \cup C^\perp$.

Задача 6. Пусть C — большая окружность, $m \notin C \cup C^\perp$, а C' и C'' — большие окружности, паралелльные C и проходящие через m. Пусть $m_0 \in C$ такая точка, что $d(m_0,m) = d(m_0,C) = \alpha$, большая окружность D проходит через m и m_0, а P — большая 2-сфера, содержащая m и C. Доказать, что D

ортогональна C' и C'', большая 2-сфера P составляет с C' и C'' угол α, а угол между C' и C'' равен 2α.

Задача 7. Докажите, что тор C_α инвариантен при вращениях в плоскостях $\bar{C}$ и $\bar{C}^\perp$. Орбиты при соответствующих вращениях — меридианы и параллели этого тора. Докажите, что окружности $C' \overset{+}{\parallel} C$ и $C'' \overset{-}{\parallel} C$, проходящие через точку на C_α, полностью лежат на этом торе. Из задачи 6 выведите, что два семейства таких окружностей пересекают меридианы и параллели C_α под одним и тем же углом α.

Задача 8. Рассмотрим стереографическую проекцию сферы $\mathbb{S}^3$ из северного полюса $n \in \mathbb{S}^3$ на пространство $\mathbb{R}^3$ со стандартными координатами x, y и z. Выберем большую окружность $C \in n$, такую, что при стереографической проекции $C \setminus \{n\}$ переходит в ось z, а большая окружность $C^\perp$ переходит в единичную окружность в плоскости x, y. Докажите, что C_α переходит в тор вращения с осью вращения Oz, при этом параллели, меридианы и два семейства окружностей, параллельных C, переходят в параллели, меридианы и два семейства окружностей Вилларсо тора вращения.

Задача 9. Из задачи 7 выведите, что окружности Вилларсо пересекают меридины тора вращения под одним и тем же углом α, а из задачи 6 выведите, что если C' и C'' — две окружности из разных семейств окружностей Вилларсо, то C'' пересекает любую сферу, содержащую C', под тем же углом α.

Задача 10. Доказать, что а) если C, C' и C'' — три такие большие окружности, что $C' \overset{+}{\parallel} C$, $C'' \overset{-}{\parallel} C$ и $d(C', C) = d(C'', C)$, то $C' \cap C'' = \varnothing$; б) если C, C' две большие окружности, такие, что $C' \overset{+}{\parallel} C$, точки $m, n \in C$ и $m' \in C'$, ,большая окружность D проходит через m и m', а большая окружность D' проходит через n и $D' \overset{-}{\parallel} D$, то $D' \cap C' = \{n'\}$ и $mnn'm'$ есть параллелограмм Клиффорда, то есть $d(m, m') = d(n, n')$, $d(m, n) = d(m', n')$ и все четыре угла в точках m, m', n, n' равны.