

**Дискретная математика**  
**Семинар 10, подготовка к экзамену**  
ВШЭ, факультет математики  
первый курс, третий модуль

1. Для  $a = 0, 1, 2$ , найдите сумму биномиальных коэффициентов

$$\sum_{i \equiv a \pmod{3}} \binom{n}{i}.$$

2. Вычислите значение  $q$ -биномиальных коэффициентов  $\binom{n}{2}_q$  при  $q = 2$ .
3. Найдите производящую функцию и линейное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами для последовательности, заданных квазимногочленом:

$$a_n = (2n + 2) \cdot 3^n - (n^2 + 3) \cdot 2^n.$$

4. Решите рекуррентное соотношение  $a_{n+4} = 2a_{n+2} - a_n$ ,  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ .
5. Соответствие между разбиениями на различные слагаемые и разбиениями на нечётные слагаемые: Каждую часть разбиения нужно поделить на максимально возможную степень двойки. Частное будет нечётным числом и нужно включить это число в новое разбиение столько раз, каков делитель. Докажите, что это соответствие биективно, построив обратное соответствие.
6. Рассмотрим векторное пространство  $V$  с базисом  $e_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Определим билинейную форму на  $V$  по формуле  $(e_i, e_j) = C_{i+j}$  ( $C_i$  — числа Каталана). Докажите, что эта форма невырождена.