

*А. К. Погребков*

**Лекции по истории и  
методологии математики**

**История возникновения и развития  
метода обратной задачи рассеяния  
и теории вполне интегрируемых уравнений**

Высшая школа экономики  
2-й семестр 2014/2015 гг.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция 1</b>	<b>2</b>
1.1	О лошадях . . . . .	2
1.1.1	Первое наблюдение “волны переноса” . . . . .	2
1.1.2	“Вывод” уравнения Кортевега–де Фриза . . . . .	3
1.1.3	Развитие теории нелинейных уравнений . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Лекция 2</b>	<b>8</b>
2.1	Лаксова пара. Общая схема метода обратной задачи . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Лекция 3</b>	<b>11</b>
3.1	Решения Йоста . . . . .	11
3.2	Матрица монодромии . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Лекция 4</b>	<b>16</b>
4.1	Свойства элементов матрицы монодромии. . . . .	16
4.1.1	Интерпретация в терминах данных рассеяния . . . . .	17
4.2	Целое решение уравнения Штурма–Лиувилля . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Лекция 5</b>	<b>20</b>
5.1	Дискретный спектр . . . . .	20
5.2	Дисперсионное соотношение. . . . .	21
<b>6</b>	<b>Лекция 6</b>	<b>24</b>
6.1	“Явные” формулы для $\kappa_n$ и $b_n$ . . . . .	24
<b>7</b>	<b>Лекция 7</b>	<b>25</b>
7.1	Обратная задача. . . . .	25
7.1.1	Спектральные данные. . . . .	25
7.1.2	Общая формулировка задачи Римана–Гильберта. . . . .	25
7.2	Задача Римана–Гильберта и восстановление потенциала оператора Штурма–Лиувилля . . . . .	26
<b>8</b>	<b>Лекция</b>	<b>29</b>
8.1	Вывод уравнения Штурма–Лиувилля из уравнений обратной задачи. . . . .	29
8.2	Временная эволюция. . . . .	30
<b>9</b>	<b>Лекция 9</b>	<b>32</b>
9.1	Солитонные решения: $r \equiv 0$ . . . . .	32
9.2	Односолитонное решение, $N = 1$ . . . . .	33
9.2.1	Двусолитонное решение, $N = 2$ . . . . .	34
9.3	Асимптотика по $t$ $N$ -солитонных решений (для желающих разобрать самостоятельно) . . . . .	35
<b>10</b>	<b>Лекция 10</b>	<b>39</b>
10.1	Интегралы движения. . . . .	39
10.2	Скобки Гарднера и Магри . . . . .	41
<b>11</b>	<b>Вопросы к зачету</b>	<b>43</b>

# 1 Лекция 1

## 1.1 О лошадях

### 1.1.1 Первое наблюдение “волны переноса”

Первое наблюдение уединенной волны в 1834г. сделал шотландский ученый и инженер Дж. Скотт Рассел (1808–1882). Окончив Университет Глазго в 16 лет, он работал в Отделении естественной истории в Эдинбурге, где изучал пропускную способность канала Юнион. Вот в процессе этих исследований он доложил о следующем:

“Я наблюдал за движением баржи, которую быстро тащила вдоль узкого канала пара лошадей, когда внезапно баржа остановилась – вся масса воды в канале пришла в движение; вода собралась у носа корабля в состоянии бурного волнения, затем вдруг оторвалась от него и покатила вперед с большой скоростью, приняв вид большого уединенного возвышения; округлый, гладкий, четко выраженный холм воды продолжал свое движение по каналу без видимого изменения формы или уменьшения скорости. Я бросился за этой волной верхом на лошади и догнал ее, когда она все еще двигалась со скоростью около восьми или девяти миль в час, сохраняя первоначальную форму, и имела около тридцати футов в длину и от фута до полутора футов в высоту. Ее высота постепенно уменьшалась, и после одной или двух миль погони я потерял ее в изгибах канала. Так в августе месяце 1834г. произошла моя первая встреча с этим необыкновенным и прекрасным явлением, которое я назвал Волной Переноса (The Wave of Translation) ...”

Жозеф Валантен Буссинеск (фр. Joseph Valentin Boussinesq, 13 марта 1842, Сент-Андре-де-Сангони – 19 февраля 1929, Париж) – французский ученый, механик, член Парижской Академии наук (1886), доктор (1867) и профессор (1886) Парижского университета, автор ряда работ по гидродинамике, оптике, термодинамике, теории упругости.

В 1872г. Буссинеску предложил уравнение, описывающее длинные волны на поверхности жидкости и показал, что оно имеет решение типа уединенной волны:

$$u(x, t) = \frac{k}{\operatorname{ch}^2 \sqrt{\frac{3k}{h^2}}(x \pm ct)}, \quad (1.1)$$

однако скорость этой волны входит параметром в само уравнение.

Дидерик Иоханнес Кортевег (нидерл. Diederik Johannes Korteweg, 31 марта 1848, Хертогенбос, Нидерланды – 10 мая 1941, Амстердам, Нидерланды) – нидерландский математик, выполнивший первые работы по исследованию уравнения Кортевега – де Фриза. Кортевег родился в семье судьи в городе Хертогенбос. Начиная свое обучение в Делфтской политехнической школе, собираясь стать инженером, однако впоследствии любовь к математике заставила его бросить учебу и стать школьным учителем математики. В 1878 году получил диплом доктора философии в Амстердамском университете с дипломной работой, посвященной распространению волн в эластичных трубах.

С 1881 по 1918 годы Кортевег работал в Амстердамском университете в качестве профессора математики, механики и астрономии. В это время совместно со своим студентом Густавом де Фризом им была опубликована его самая известная работа “On the Change of Form of Long Waves advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Wave”.

Густав де Фриз (нидерл. Gustav de Vries, 22 января 1866, Амстердам, Нидерланды – 16 декабря 1934, Харлем, Нидерланды) – нидерландский математик, известный тем, что первым исследовал уравнение Кортевега–де Фриза. Родился в Амстердаме. Учился в Амстердамском университете вместе с Яном Ван-дер-Ваальсом. В 1894 году под руководством Дидерика Кортевега защитил докторскую по теме “Bijdrage tot de kennis der lange golven” (“Вклад в знания о длинных волнах”). На следующий год вышла его совместная с руководителем классическая работа, в которой было предложено уравнение, называемое с тех пор уравнением Кортевега–де Фриза. Эта работа стала крупнейшим достижением ученого. Впоследствии де Фриз работал преподавателем математики в высшей школе в Харлеме. В 1931 году ушел в отставку.

В 1895г. Кортевег и де Фриз получили уравнение распространения волн в одном направлении по поверхности мелкого канала (для невязкой, несжимаемой, однородной жидкости в постоянном поле тяжести)

$$u_t - buu_x + u_{xxx} = 0. \quad (1.2)$$

Они показали, что это уравнение обладает уединенной волной, т.е. решением вида

$$u(x, t) = \frac{-2\kappa^2}{\operatorname{ch}^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t - x_0)} \quad (1.3)$$

(отклонение уровня воды от стационарного для дальнейшего удобства обозначено  $-u$ ), где в отличие от (1.1) параметр  $\kappa$  – произвольная положительная константа, не фиксированная уравнением. Именно эту волну и наблюдал Рассел.

### 1.1.2 “Вывод” уравнения Кортевега–де Фриза

Рассмотрим волновой процесс в предположении

1. отсутствия диссипации,
2. отсутствия дисперсии,
3. малости амплитуды колебаний  $\psi$

Тогда волновой процесс описывается волновым уравнением:

$$\partial_t^2 \psi = c^2 \partial_x^2 \psi. \quad (1.4)$$

Диссипативные системы – такие системы у которых механическая энергия (сумма кинетической и потенциальной) убывает, переходя в другие формы, например в теплоту (dissipatio – рассеивание, исчезновение (лат.)).

Дисперсия (dispersio – рассеяние (лат.)) – зависимость фазовой скорости гармонической волны от ее частоты. Гармоническая (плоская) волна:

$$e^{i\omega t - ikx}, \quad (1.5)$$

где  $\omega$  – частота,  $k$  – волновой вектор,

$$\omega(k) = kv(k) \quad (1.6)$$

$v(k)$  – фазовая скорость. Групповая скорость =  $\frac{\partial\omega}{\partial k}$ . Дисперсионное соотношение – уравнение, связывающее частоту колебаний  $\omega$  и волновой вектор  $k$ :  $\omega = \omega(k)$ .

Диссипация приводит к затуханию волны, дисперсия – к расползанию и перемешиванию пакетов, а нелинейные эффекты – к укрупнению фронтов. Эффект нелинейности хорошо демонстрирует бездисперсное уравнение КдФ:

$$u_t = 6uu_x, \quad (1.7)$$

которое решается следующим образом (см. задачу 1). Найдем  $s$  из уравнения

$$s = x + 6tu_0(s),$$

где  $u_0(x)$  – начальное данное. Тогда решение задачи Коши для (1.7) дается посредством

$$u(t, x) = u_0(s(t, x)). \quad (1.8)$$

Рассмотрим как можно учесть малые нелинейность и дисперсию.

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1(x - ct) + \psi_2(x + ct) \\ \partial_t \psi + c\partial_x \psi &= 0 \\ v(k) &= v_0 + v_1 k^2 + v_2 k^4 + \dots \\ \omega &= ck - \beta k^3 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Такой закон дисперсии дается уравнением:

$$\partial_t \psi + c\partial_x \psi + \beta \partial_x^3 \psi = 0 \quad (1.10)$$

Теперь введем нелинейность. Уравнения (1.9) и (1.10) имеют вид

$$\partial_t \psi + \partial_x j = 0,$$

т.е.  $\int dx \psi(x, t)$  сохраняется во времени. Добавим первую квадратичную поправку к  $j$ :

$$\begin{aligned} j &= c\psi + \beta \partial_x^2 \psi + \frac{\alpha}{2} \psi^2 \\ \partial_t \psi + c\partial_x \psi + \beta \partial_x^3 \psi + \alpha \psi \partial_x \psi &= 0 \\ x \longrightarrow x + ct, \quad \psi &= -\frac{\beta}{\alpha} u \end{aligned}$$

### 1.1.3 Развитие теории нелинейных уравнений

В 1954г. Ферми, Паста и Улам, изучая на ЭВМ поведение цепочки нелинейных осцилляторов (что можно рассматривать как численное моделирование КдФ), обнаружили аномально медленную стохастизацию этой этой динамической системы.

В 1958г. Сагдеев показал, что в плазме могут распространяться солитоны, а Гарднер и Морикава в 1960 г. показали, что уравнения, описывающие сильную плазму аналогичны КдФ.

В 1965г. Забуски и Крускал, экспериментируя с численными решениями КдФ показали, что солитоны сталкиваются упруго и ввели само понятие “солитон”. Затем были открыты бесконечные серии законов сохранения.

Мы будем называть солитонами любые (экспоненциально) локализованные нелинейные волны, которые взаимодействуют с произвольными локальными возмущениями и всегда восстанавливают асимптотически свою форму.

В 1967г. Гарднер, Грин, Крускал и Миура предложили метод спектрального преобразования как метод решения задачи Коши

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (1.11)$$

для уравнения КдФ, где  $u_0(x)$  – заданное начальное данное. Современный вариант этого метода называется методом обратной задачи рассеяния.

Питер Дэвид Лакс (Peter David Lax; 1 мая 1926, Будапешт) – венгерский и американский математик, лауреат премии Вольфа 1987. Питер Лакс родился в 1926 году в Будапеште. Родители Питера (Генри Лакс и Клара Корнфельд) были врачами. В 1941 году вся семья переехала на постоянное место жительства в Нью-Йорк. С 19-летнего возраста принимал участие в Манхэттенском проекте – программе по разработке ядерного оружия. В 1949 году получил степень доктора философии Нью-Йоркского университета. Лакс являлся сотрудником Лос-Аламосской национальной лаборатории, а также работал в Курантовском институте математических наук.

Поле деятельности Лакса многогранно: в частности в него входило изучение интегрируемых систем, ударной волны, гидродинамики. Он также внес существенный вклад в развитие теории солитонов. С его именем связаны такие математические достижения и числовые методы как лемма Лакса–Мильграма, теорема эквивалентности Лакса, схема Лакса–Фридрихса, схема Лакса–Вендрофа, условие энтропии Лакса и теория Лакса–Левормора.

За свою деятельность Лакс был удостоен множества премий и наград. С 1970 года он является членом Национальной академии наук США. В 1975 году ему была вручена Премия Норберта Винера. В 1986 году он был награжден Национальной научной медалью США, а в 1987 был удостоен премии Вольфа. В 2005 году математик стал лауреатом Абелевской премии. Лакс также является почетным доктором многих университетов мира, в том числе и Санкт-Петербургского государственного университета (с 1990 года).

В 1968г. Лакс обобщил метод обратной задачи рассеяния и вскрыл алгебраический механизм, лежащий в основе работы Гарднера, Грина, Крускала и Миуры. Уравнение КдФ эквивалентно **представлению Лакса**

$$L_t = [L, M] \quad (1.12)$$

для пары операторов  $L$  и  $M$  (говорят также, что операторы  $L$  и  $M$  образуют **лаксову пару**). Как мы увидим в дальнейшем, именно соотношение (1.12) лежит в основе применимости метода обратной задачи к нелинейным эволюционным уравнениям. Существование и конкретный вид этих операторов, конечно, существенно зависят от рассматриваемого нелинейного уравнения.

В 1971г. Гарденер, Захаров и Фаддеев построили теорию уравнения КдФ как гамильтоновой системы.

Жозеф Лиувилль (фр. Joseph Liouville; 24 марта 1809 – 8 сентября 1882) – французский математик. Систематически исследовал разрешимость ряда задач, дал строгое определение понятию элементарной функции и квадратуры. В частности, исследовал возможность интегрирования заданной функции, алгебраической или трансцендентной, в элементарных функциях, и разрешимость в квадратурах линейного уравнения 2-го порядка. Доказал, что специальное уравнение Риккати интегрируется в квадратурах только в тех случаях, которые были даны еще Бернулли. В честь Лиувилля были названы поверхность Лиувилля и сеть Лиувилля, а также несколько математических теорем.

Лиувилль закончил Политехническую школу в 1827 г. После нескольких лет ассистентуры в разных учреждениях, включая Центральную школу Парижа, в 1838 г. был приглашен в Политехническую школу в качестве профессора. Получил членство в Коллеж де Франс по математике в 1850 г. и по механике в 1857 г.

Кроме академических достижений он был очень талантливым организатором. Лиувилль основал “Журнал чистой и прикладной математики” (фр. Journal de mathématiques pures et appliquées), который поддерживает свою репутацию до настоящего времени, для продвижения математических работ. Он первым прочитал неопубликованные работы Галуа и осознал их важность, они были опубликованы в журнале в 1846 г. Лиувилль также некоторое время занимался политикой и стал членом Национальной ассамблеи в 1848 г. Однако после ликвидации выборов в Ассамблею в 1849 г. ушел из политики.

В классической механике имеется теорема Лиувилля, согласно которой система, в которой число интегралов движения в инволюции совпадает с числом степеней свободы  $n$ , может быть полностью проинтегрирована (решена) методом разделения переменных в уравнении Гамильтона–Якоби. Такая система является интегрируемой системой. Траектория такой системы в  $2n$ -мерном фазовом пространстве может быть представлена в подходящих переменных (переменных действие-угол) как намотка на  $n$ -мерном торе. Система, число интегралов в которой меньше числа степеней свободы, проявляет хаотическое поведение, то есть траектории в фазовом пространстве с близкими начальными условиями могут экспоненциально расходиться. При небольшой деформации интегрируемой системы в неинтегрируемую  $n$ -мерный тор в  $2n$ -мерном фазовом пространстве разрушается (“размывается”), превращаясь, например в странный аттрактор.

В 1971г. Захаров и Шабат решили методом обратной задачи нелинейное уравнение Шредингера! В 1973г. метод был применен сразу к нескольким уравнениям в работе Абловица, Каупа, Ньюэлла и Сигура. После этих работ стало понятно, что уравнение КдФ – не единственное интегрируемое уравнение!!!

В 1975г. Захаров и Шабат предложили процедуру одевания.

Помимо уравнения КдФ в XIX веке были известны: уравнение sine-Гордон и уравнения Цицейки. Для уравнения sine-Гордон, возникающего при описании

поверхностей постоянной отрицательной кривизны, был открыт способ построения и “размножения” солитонных решений – преобразование Беклунда.

В создание и развитие теории солитонов огромный вклад внесли школы Фаддеева и Новикова.

**Задача 1** *Показать, что задача Коши*

$$\begin{aligned}u_t &= 6uu_x \\ u(0, x) &= u_0(x)\end{aligned}$$

*для бездисперсного уравнения КдФ (1.7) решается посредством равенства (1.8).*

## 2 Лекция 2

### 2.1 Лаксова пара. Общая схема метода обратной задачи

Лаксова пара для уравнения КдФ – пара дифференциальных операторов:

$$L = -\partial_x^2 + u, \quad (2.1)$$

$$M = 4\partial_x^3 - 6u\partial_x - 3u_x, \quad (2.2)$$

см. Задачу 2. Важнейшей особенностью пары Лакса является то, что временная производная не входит в  $L$ -оператор. Таким образом мы можем рассматривать  $t$  как параметр и исследовать спектральные свойства этого оператора, т.е., исследовать решения уравнения

$$Ly = \lambda y. \quad (2.3)$$

Это уравнение на функцию  $y(t, x)$  есть **спектральная проблема** для оператора (2.1), иногда оно также называется **вспомогательной линейной задачей** для рассматриваемого нелинейного уравнения. Заметим, что в силу (1.12)

$$(L - \lambda)(y_t + My) = 0, \quad (2.4)$$

т.е. комбинация  $y_t + My$  также удовлетворяет уравнению (2.3), но не обязана быть нулем. В то же время, уравнение

$$y_t = -My \quad (2.5)$$

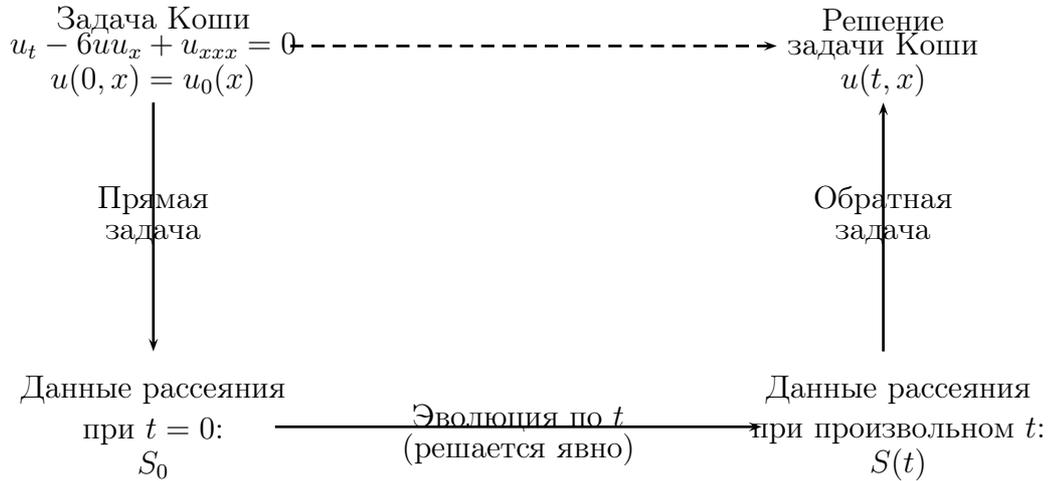
совместно с уравнением (2.3) в силу (1.12), Задача 3. Здесь уместно подчеркнуть, что совместность уравнений означает лишь наличие их общего решения, но отнюдь не то, что каждое решение одного из них будет решением и другого.

Уравнение (2.3) хорошо известно в физике: это стационарное одномерное уравнение Шредингера.

Эрвин Рудольф Йозеф Александр Шрёдингер (нем. Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger; 12 августа 1887, Вена – 4 января 1961, там же) – австрийский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики. Лауреат Нобелевской премии по физике (1933). Член ряда академий наук мира, в том числе иностранный член Академии наук СССР (1934). Шредингеру принадлежит ряд фундаментальных результатов в области квантовой теории, которые легли в основу волновой механики: он сформулировал волновые уравнения (стационарное и зависящее от времени уравнения Шредингера), показал тождественность развитого им формализма и матричной механики, разработал волномеханическую теорию возмущений, получил решения ряда конкретных задач.

Впрочем, уравнение (2.3) также исследовалось математиками еще в XIX веке. Оно известно также как уравнение Штурма–Лиувилля. Для нас важно, что для уравнения (2.3) разрешимы прямая и обратная задачи рассеяния. Прямая задача: определение по потенциалу  $u$  данных рассеяния, которые мы обозначим  $S$ . Их определения и свойства будут даны в последующих лекциях. Обратная задача: восстановление потенциала  $u$  по данным рассеяния. При этом оказывается, что при условии достаточно быстрого убывания потенциала на

пространственной бесконечности равенства (2.4) и (2.5) приводят к линейным дифференциальным уравнениям по  $t$  на данные рассеяния. Указанные свойства, подробному выводу и обсуждению которых мы посвятим следующие лекции, позволяют сформулировать общую схему метода обратной задачи рассеяния в применении к теории нелинейных интегрируемых уравнений следующим образом. По заданному начальному данному  $u_0(x)$  строятся отвечающие ему



данные рассеяния  $S_0$ . Далее, явно решается уравнение временной эволюции для спектральных данных, т.е. мы находим данные рассеяния  $S(t)$ . По ним, используя уравнения обратной задачи, мы восстанавливаем потенциал  $u(t, x)$ , который ввиду эквивалентности (1.12) и уравнения КдФ (1.2) есть решение этого нелинейного уравнения и поставленной задачи Коши. Таким образом, решение нелинейного уравнения свелось к решению трех линейных задач, одна из которых решается явно! Как мы видим, весь метод основан именно на возможности решения обратной задачи. Ее разрешимость есть основное условие применимости метода. Очевидно, что для уравнения (1.2) и гораздо более простая “лаксова пара”:

$$L = \partial_x + u, \quad M = 3u^2 - u_{xx}, \quad (2.6)$$

для которой также равенство (1.12) эквивалентно уравнению КдФ (1.2). Однако, такой  $L$ -оператор – преобразование подобия оператора  $\partial_x$ :

$$L = \exp\left(-\int^x u(x)\right) \partial_x \exp\left(-\int^x u(x)\right),$$

а потому имеет тривиальный спектр, не зависящий от  $u(x)$ , и соответственно, не обладает обратной задачей. Отметим, что такого рода бесполезные “пары Лакса” могут быть выписаны для любого уравнения в любом числе измерений. Поэтому, говоря об интегрируемых уравнениях, мы всегда будем иметь ввиду наличие для них лаксовой пары, в которой для оператора  $L$  имеются прямая и обратная задачи.

**Задача 2** Доказать, что (1.12), где  $L$  и  $M$  даны в (2.1) и (2.2) эквивалентно (1.2).

**Задача 3** Доказать, что условие совместности (2.3) и (2.5) есть (1.2).

## 3 Лекция 3

### 3.1 Решения Йоста

Итак, мы на некоторое время опускаем явную зависимость от  $t$  и приступаем к исследованию спектральной задачи на всей оси ( $-\infty < x < +\infty$ ) для вещественного, ( $u(x) \in \mathbb{R}$ ), непрерывного и убывающего при больших  $x$  ( $u(x) \rightarrow 0$ ,  $|x| \rightarrow \infty$ ) потенциала. Уравнение (2.3) с оператором (2.1) называется уравнением Штурма–Лиувилля. В то же время оно является одномерным стационарным уравнением Шредингера. Из стандартного курса квантовой механики известно, что непрерывный спектр этого уравнения лежит на положительной полуоси  $\lambda \geq 0$  спектрального параметра и является двукратно вырожденным. Мы рассматриваем класс потенциалов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx |u(x)|(1 + |x|) < \infty, \quad (3.1)$$

причем всегда впредь мы будем использовать символ  $\int$  в смысле  $\int_{-\infty}^{+\infty}$ . В дальнейшем мы будем получать некоторые результаты и при более жестком условии на потенциал:

$$u(x) = O\left(\frac{1}{x^{2+\epsilon}}\right) \quad \text{для некоторого } \epsilon > 0. \quad (3.2)$$

Нам будет также удобно далее обозначать спектральный параметр  $\lambda = k^2$ , так что уравнение (2.3) приобретает вид

$$-y_{xx} + u(x)y = k^2 y, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (3.3)$$

при этом именно  $k$  мы будем называть спектральным параметром.

Пусть  $k \in \mathbb{R}$ . Введем два специальных решения уравнения (3.3), задав их асимптотиками на отрицательной и положительной бесконечностях, соответственно:

$$\varphi(x, k) = e^{-ikx} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (3.4)$$

$$\psi(x, k) = e^{-ikx} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (3.5)$$

Эти решения известны в литературе как **решения Йоста**. Ввиду вещественности потенциала  $u(x)$  и параметра  $k$  комплексно сопряженные функции  $\overline{\varphi}(x, k)$  и  $\overline{\psi}(x, k)$  также являются решениями уравнения (3.3). Причем в силу граничных условий (3.4), (3.5)

$$\overline{\varphi}(x, k) = \varphi(x, -k), \quad \overline{\psi}(x, k) = \psi(x, -k), \quad k \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

Чтобы убедиться в существовании всех введенных решений, заметим, что дифференциальное уравнение (3.3) совместно с граничными условиями (3.4) или (3.5), соответственно, эквивалентно интегральным уравнениям

$$\varphi(x, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x dx' \frac{\sin k(x-x')}{k} u(x') \varphi(x', k) \quad (3.7)$$

и

$$\psi(x, k) = e^{-ikx} - \int_x^{+\infty} dx' \frac{\sin k(x-x')}{k} u(x') \psi(x', k), \quad (3.8)$$

Задача 4. Эти уравнения принадлежат классу Вольтерра, а потому однозначно разрешимы при условии (3.1) на потенциал. Введем вспомогательные функции

$$\chi_+(x, k) = e^{ikx} \varphi(x, k) \quad \chi_-(x, k) = e^{ikx} \psi(x, k), \quad (3.9)$$

удовлетворяющие дифференциальному уравнению

$$-\chi_{\pm,xx}(x, k) + 2ik\chi_{\pm,x} + u(x)\chi_{\pm} = 0. \quad (3.10)$$

Тогда вместо (3.7) мы имеем

$$\chi_+(x, k) = 1 + \int_{-\infty}^x dx' \frac{e^{2ik(x-x')} - 1}{2ik} u(x') \chi_+(x', k). \quad (3.11)$$

Очевидно, что здесь можно продолжить на  $k \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im}k \geq 0$ , поскольку экспонента в подынтегральном выражении в этой области убывает. Аналогично,

$$\chi_-(x, k) = 1 - \int_x^{+\infty} dx' \frac{e^{2ik(x-x')} - 1}{2ik} u(x') \chi_-(x', k), \quad (3.12)$$

что аналитично в  $k \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im}k \leq 0$ . Свойства этих функций дают следующие леммы.

**Лемма 3.1** (Фаддеев) *Существует такая константа  $K$ , что:*

$$|\chi_+(x, k) - 1| \leq K \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^x dx' |u(x')|, \quad \text{Im}k \geq 0 \quad (3.13)$$

$$|\chi_+(x, k) - 1| \leq K \int_{-\infty}^x dx' |x' u(x')|, \quad \text{Im}k \geq 0$$

$$|\partial_x \chi_+(x, k)| \leq K \int_{-\infty}^x dx' |u(x')|, \quad \text{Im}k \geq 0$$

Кроме того, функция  $\chi_{+,k}(x, k)$  непрерывно дифференцируема по  $k \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im}k \geq 0$  за исключением, может быть, точки  $k = 0$ . При этом выполнена оценка:

$$|\partial_k \chi_+(x, k)| \leq \frac{K}{|k|}, \quad \text{Im}k \geq 0 \quad (3.14)$$

**Лемма 3.2** *Существует*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \chi_+(x, k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int dy \chi_+(y, k) u(y) \quad (3.15)$$

*Доказательство* По предыдущей лемме  $\chi_+(x, k)$  ограничена при всех  $-\infty \leq x \leq +\infty$ ,  $k \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im}k \geq 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2ikx} \int_{-\infty}^x dy e^{-2iky} \chi_+(y, k) u(y) = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-\infty}^x dy e^{-2iky} \chi_+(y, k) u(y)}{e^{-2ikx}} = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\chi_+(x, k) u(x)}{-2ik} = 0, \end{aligned}$$

что доказывает (3.15) в силу (3.11).

**Асимптотическое поведение решений Йоста по  $k$ .** Интегральные уравнения (3.11) и (3.12) позволяют уточнить указанное в Лемме 3.1 асимптотическое поведение по  $k$ . Действительно, как уже говорилось, слагаемые с экспонентами убывают, а потому по (3.13):

$$\chi_+(x, k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^x dx' u(x') + o\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \in \mathbb{C}, \quad \text{Im}k > 0 \quad (3.16)$$

и аналогичное соотношение (3.33). Эти формулы позволяют восстановить потенциал  $u(x)$  (точнее говоря, его первообразную) по известным решениям Йоста, Задача 5

Укажем также обобщение на комплексный случай соотношений (3.6):

$$\overline{\varphi(x, k)} = \varphi(x, -\bar{k}), \quad \text{Im}k \geq 0, \quad (3.17)$$

$$\overline{\psi(x, k)} = \psi(x, -\bar{k}), \quad \text{Im}k \leq 0,$$

которые следует из указанных свойств аналитичности в соответствующих полуплоскостях. В частности отсюда следует, что при чисто мнимых  $k = ip$ ,  $\text{Im}p = 0$  решения Йоста вещественны:

$$\text{Im}\varphi(x, ip) = 0, \quad p \geq 0, \quad (3.18)$$

$$\text{Im}\psi(x, ip) = 0, \quad p \leq 0.$$

## 3.2 Матрица монодромии

Пары решений  $\varphi$ ,  $\bar{\varphi}$  и  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  линейно независимы при вещественных  $k$ , отличных от нуля. Действительно, пусть

$$W(f, g) = fg_x - f_xg \quad (3.19)$$

означает вронскиан функций  $f$  и  $g$ . Обращение вронскиана в ноль эквивалентно пропорциональности функций  $f$  и  $g$ . Хорошо известно (Задача 6), что если  $f$  и  $g$  удовлетворяют уравнению (3.3), то

$$\partial_x W(f, g) = 0. \quad (3.20)$$

таким образом для вычисления значений вронскианов решений Йоста можно воспользоваться их асимптотическим поведением (3.4) и (3.5), что дает (Задача 7)

$$W(\varphi, \bar{\varphi}) = W(\psi, \bar{\psi}) = 2ik. \quad (3.21)$$

Итак при  $k \neq 0$  решение  $\varphi$  линейно независимо от  $\bar{\varphi}$  и аналогично для пары  $\psi, \bar{\psi}$ . Поскольку уравнение (3.3), как и всякое уравнение второго порядка, может иметь не более двух линейно независимых решений, то каждая из этих пар образует полный набор. Таким образом существует постоянная (т.е. не зависящая от  $x$ ) (приведенная) матрица монодромии  $T(k)$  такая, что

$$\begin{pmatrix} \varphi(x, k) \\ \bar{\varphi}(x, k) \end{pmatrix} = T(k) \begin{pmatrix} \psi(x, k) \\ \bar{\psi}(x, k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (3.22)$$

где

$$T(k) = \begin{pmatrix} a(k) & b(k) \\ \bar{b}(k) & \bar{a}(k) \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

где мы учли, что вторая строка в (3.22) является комплексно сопряженной к первой. Отметим, что в соответствии с предыдущим обсуждением точку  $k = 0$  мы в дальнейшем рассмотрим отдельно.

Первая строка равенства (3.22) имеет вид

$$\varphi(x, k) = a(k)\psi(x, k) + b(k)\bar{\psi}(x, k), \quad k \in \mathbb{R}, \quad (3.24)$$

что ввиду (3.6), т.е. в силу вещественности потенциала  $u(x)$ , означает, выполнение соотношений

$$\bar{a}(k) = a(-k), \quad \bar{b}(k) = b(-k), \quad k \in \mathbb{R} \quad (3.25)$$

для элементов матрицы монодромии. Для того, чтобы найти явное выражение этих элементов через потенциалы и решения Йоста, запишем (3.7) как

$$\begin{aligned} \varphi(x, k) = & e^{-ikx} + \frac{e^{ikx}}{2ik} \int dx' e^{-ikx'} \varphi(x', k) u(x') - \\ & - \frac{e^{-ikx}}{2ik} \int dx' e^{ikx'} \varphi(x', k) u(x') - \\ & - \int_x^{+\infty} dx' \frac{\sin k(x-x')}{k} \varphi(x', k) u(x'). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Тогда в силу (3.24)

$$\begin{aligned} a(k)\psi(x, k) + b(k)\bar{\psi}(x, k) = & e^{-ikx} \left( 1 - \frac{1}{2ik} \int dx' e^{ikx'} \varphi(x', k) u(x') \right) + \\ & + \frac{e^{ikx}}{2ik} \int dx' e^{-ikx'} \varphi(x', k) u(x') + \\ & + a(k) (\psi(x, k) - e^{-ikx}) + \\ & + b(k) (\bar{\psi}(x, k) - e^{ikx}), \end{aligned}$$

так что

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int dy e^{iky} \varphi(y, k) u(y) \equiv 1 - \frac{1}{2ik} \int dy \chi_+(y, k) u(y) \quad (3.27)$$

и

$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int dy e^{-iky} \varphi(y, k) u(y). \quad (3.28)$$

Ввиду доказанной ранее аналитичности  $\chi_+$  в области  $\text{Im}k > 0$ , видно, что и функция  $a(k)$  также аналитична в верхней полуплоскости и задается равенством (3.27) при  $\text{Im}k \geq 0$ . Что касается функции  $b(k)$ , то она, вообще говоря, не продолжается с вещественной прямой  $\text{Im}k = 0$ . Для ее продолжимости в комплексную область следует потребовать, например, чтобы потенциал  $u(x)$  убывал с ростом  $x$  быстрее любой линейной экспоненты, что сильно сужает класс рассматриваемых потенциалов, а потому мы не будем накладывать это условие.

Отметим, что в силу (3.13)

$$a(k) = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{Im}k > 0 \quad (3.29)$$

а в силу (3.15)

$$a(k) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \chi_+(x, k) \quad (3.30)$$

Аналогично предыдущему можно получить представления

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int dy e^{-iky} \bar{\psi}(y, k) u(y) = 1 - \frac{1}{2ik} \int dy \overline{\chi_-(y, \bar{k})} u(y), \quad \text{Im}k \geq 0, \quad (3.31)$$

где в соответствии с предыдущим  $\bar{\psi}(x, k)$  аналитична в верхней полуплоскости, поскольку  $\bar{\psi}(x, k) \equiv \overline{\psi(x, \bar{k})}$  и аналогично  $\bar{\chi}$ . Кроме того:

$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int dy e^{-iky} \psi(y, k) u(y), \quad \text{Im}k = 0, \quad (3.32)$$

Задача 8.

**Задача 4** Доказать, что уравнение (3.7) эквивалентно (3.3) и условию (3.4). Доказать, что уравнение (3.8) эквивалентно (3.3) и условию (3.5).

**Задача 5** Доказать, что помимо (3.16) выполнено:

$$\chi_-(x, k) = 1 + \frac{1}{2ik} \int_x^{+\infty} dx' u(x') + o\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \in \mathbb{C}, \quad \text{Im}k < 0 \quad (3.33)$$

**Задача 6** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  – произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Доказать, что для любых таких  $f$  и  $g$ , удовлетворяющих (3.3), выполнено (3.20).
2. Доказать, что для любых таких  $f$  и  $g$ , удовлетворяющих (3.20), найдется такая функция  $u(x)$ , что выполнено (3.3).

**Задача 7** Доказать (3.21).

**Задача 8** Доказать (3.31) и (3.32).

## 4 Лекция 4

### 4.1 Свойства элементов матрицы монодромии.

Полученные выражения для функций  $a(k)$  и  $b(k)$  показывают, что в точке  $k = 0$  обе они, вообще говоря, имеют полюсную особенность:

$$a(k) = \frac{ic}{k} + O(1), \quad b(k) = \frac{-ic}{k} + O(1), \quad k \rightarrow 0, \quad (4.1)$$

причем в силу (3.27) или (3.28)

$$c = \frac{1}{2} \int dy \varphi(y, 0) u(y), \quad (4.2)$$

что вещественно в силу вещественности потенциала и (3.6), т.е. опять-таки в силу вещественности потенциала. Тогда, мы видим, что соотношение (3.24) выполняется и в точке  $k = 0$ : предел правой части при  $k \rightarrow 0$  существует по Лемме (3.1), а предел правой части существует опять же в силу этой Леммы, условия (3.6) и (4.1) и равен

$$\varphi(x, 0) = 2ic\psi_k(x, 0) + \tilde{c}\psi(x, 0), \quad (4.3)$$

где  $\tilde{c}$  — некоторая константа. По условию нормировки (3.5):  $\psi_k(x, 0) = -ix + O(1)$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Таким образом равенство (4.1) имеет прозрачный смысл: решение, ограниченное на левом конце оси  $x$ -ов ( $\varphi(x, 0) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow -\infty$ ), на правом конце представляет собой линейную комбинацию линейно растущего ( $\psi_k(x, 0)$ ) и ограниченного ( $\psi(x, 0)$ ) решений. Понятно, что для потенциалов общего положения  $c \neq 0$ . Если же выполнено условие  $c = 0$ , т.е. каждое решение ограниченное на левом конце остается ограниченным и на правом (легко убедиться, что это утверждение справедливо и в случае, если ‘левое’ и ‘правое’ поменять местами), называются **потенциалами с квазиуровнем при нулевой энергии**.

**Предел малых  $u$ .** В первом порядке по потенциалу  $u$  элемент  $b(k)$  матрицы монодромии переходит в преобразование Фурье потенциала, как следует из (3.28):

$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int dy e^{-2iky} u(y) + O(u^2) \quad (4.4)$$

Элементы  $a$  и  $b$  матрицы монодромии не независимы. Действительно, подставляя (3.24) в первое равенство в (3.21), мы в силу второго равенства получаем унимодулярность матрицы монодромии (Задача 9)

$$\det T(k) \equiv |a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (4.5)$$

Тогда обратная матрица  $T(k)^{-1}$  равна

$$T(k)^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a}(k) & -b(k) \\ -\bar{b}(k) & a(k) \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

а обращение равенства (3.24) имеет вид

$$\psi(x, k) = \bar{a}(k)\varphi(x, k) - b(k)\bar{\varphi}(x, k), \quad k \in \mathbb{R}. \quad (4.7)$$

Отметим также, что в силу, например, равенств (3.24) и (3.21) элементы матрицы монодромии также могут быть выражены посредством соответствующих вронскианов:

$$a(k) = \frac{W(\varphi(x, k), \bar{\psi}(x, k))}{2ik}, \quad k \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} k \geq 0, \quad (4.8)$$

$$b(k) = \frac{W(\varphi(x, k), \psi(x, k))}{-2ik}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (4.9)$$

Заметим, что равенство (4.8) дает еще одно доказательство аналитической продолжимости  $a(k)$  в верхнюю полуплоскость. При этом, как обычно, мы понимаем  $\bar{\psi}(x, k)$  как аналитическое продолжение функции комплексно сопряженной к  $\psi$ . Иными словами:  $\bar{\psi}(x, k) \equiv \psi(x, \bar{k})$ .

#### 4.1.1 Интерпретация в терминах данных рассеяния

Рассмотрим нестационарное уравнение Шредингера:

$$i\tilde{\varphi}_t = L\tilde{\varphi}$$

**Внимание!** ‘Время’  $t$  в этом уравнении не имеет никакого отношения к временной эволюции уравнения КдФ.

На пространственных бесконечностях решения этого уравнения имеют вид плоских волн:  $\tilde{\varphi}(t, x, k) = e^{-i(\omega t \pm kx)} + o(1)$ , где  $\omega = k^2$ . Верхний знак отвечает при  $k > 0$  волне, движущейся справа налево, а нижний знак — слева направо. В то же время, учитывая (3.5) и (3.24) мы имеем при  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\frac{\varphi(x, k)}{a(k)} = e^{-ikx} + \frac{b(k)}{a(k)}e^{ikx} + o(1),$$

где первое слагаемое является падающей, а второе — отраженной волнами. Именно для того, чтобы при падающей волне был единичный коэффициент, мы поделили  $\varphi$  на  $a$ . Заметим, что терминология задачи рассеяния, конечно, возникла из рассмотрения радиальной части трехмерного уравнения Шредингера, что объясняет возникновение названий волн: действительно, падающей в таком случае является волна, приходящая с положительной бесконечности, т.е. из области бесконечно больших радиусов. Аналогично при  $x \rightarrow -\infty$  получаем прошедшую волну:

$$\frac{\varphi(x, k)}{a(k)} = \frac{e^{-ikx}}{a(k)} + o(1).$$

Таким образом естественно ввести величины

$$t(k) = \frac{1}{a(k)}, \quad r(k) = \frac{b(k)}{a(k)}, \quad (4.10)$$

называемые, соответственно, **коэффициентами прохождения и отражения**. Введенные величины не независимы. В силу (4.5):

$$|t(k)|^2 + |r(k)|^2 = 1, \quad (4.11)$$

а в силу (3.25):

$$\bar{t}(k) = t(-k), \quad \bar{r}(k) = r(-k). \quad (4.12)$$

Выполнены, также, следующие свойства:

$$|r(k)| < 1, \quad k \neq 0, \quad (4.13)$$

$$r(k) = O\left(\frac{1}{k}\right), \quad |k| \rightarrow \infty, \quad (4.14)$$

$$\int dx(1+|x|)|B_x(x)| < \infty, \quad \text{где } B(x) = \int dk e^{ikx}b(k). \quad (4.15)$$

Отметим также, что в силу (4.5) и (4.10)

$$|a(k)|^2 = \frac{1}{1-|r(k)|^2} \quad (4.16)$$

## 4.2 Целое решение уравнения Штурма–Лиувилля

Введем еще одно решение уравнения Штурма–Лиувилля, полезное при построении функции Грина этого уравнения. Пусть  $s(x, y, k)$  удовлетворяет по  $x$  уравнению (3.3) и задано граничными условиями в точке  $x = y$ :

$$\begin{aligned} s(x, x, k) &= 0, \\ s_x(x, y, k) \Big|_{x=y} &= 1. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Это решение задается интегральным уравнением

$$s(x, y, k) = \frac{\sin k(x-y)}{k} + \int_y^x dx' \frac{\sin k(x-x')}{k} u(x')s(x', y, k) \quad (4.18)$$

и, как легко видеть, определяет целую функцию  $k$  при всех  $k \in \mathbb{C}$ . В силу этого уравнения

$$s(x, y, -k) = s(x, y, k), \quad k \in \mathbb{C}, \quad (4.19)$$

$$\overline{s(x, y, k)} = s(x, y, \bar{k}), \quad (4.20)$$

т.е. функция  $s(x, y, k)$  вещественна при вещественном  $k$ .

Легко также проверить (Задача 10), что в силу равенств (3.24), (3.21), (4.8), (4.9) и (4.7) выполнены следующие представления:

$$s(x, y, k) = \begin{cases} \frac{\varphi(x, k)\bar{\psi}(y, k) - \varphi(y, k)\bar{\psi}(x, k)}{-2ika(k)}, & \text{при } \text{Im}k \geq 0, \\ \frac{\bar{\varphi}(x, k)\psi(y, k) - \bar{\varphi}(y, k)\psi(x, k)}{2ik\bar{a}(k)}, & \text{при } \text{Im}k \leq 0, \\ \frac{\varphi(x, k)\bar{\varphi}(y, k) - \varphi(y, k)\bar{\varphi}(x, k)}{-2ik}, & \text{при } k \in \mathbb{R}, \\ \frac{\psi(x, k)\bar{\psi}(y, k) - \psi(y, k)\bar{\psi}(x, k)}{-2ik}, & \text{при } k \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.21)$$

Для доказательства, например, первого равенства выберем  $k$  в верхней полуплоскости. В силу (4.8) полный набор линейно-независимых решений уравнения (3.3) в этом случае есть  $\varphi(x, k)$  и  $\bar{\psi}(x, k)$ . Поскольку  $s(x, y, k)$  также удовлетворяет (по  $x$ ) уравнению Штурма–Лиувилля, то найдутся такие, независимые от  $x$ , функции  $\alpha(y, k)$ ,  $\beta(y, k)$ , что

$$s(x, y, k) = \varphi(x, k)\alpha(y, k) + \bar{\psi}(x, k)\beta(y, k).$$

Тогда получаем равенства

$$\begin{aligned}\varphi(x, k)\alpha(x, k) + \bar{\psi}(x, k)\beta(x, k) &= 0, \\ \varphi_x(x, k)\alpha(x, k) + \bar{\psi}_x(x, k)\beta(x, k) &= 0,\end{aligned}$$

откуда

$$\alpha(y, k) = \frac{-\bar{\psi}(y, k)}{2ika(k)W[\phi(y, k), \bar{\psi}(y, k)]}, \quad \beta(y, k) = \frac{\varphi(y, k)}{2ika(k)W[\phi(y, k), \bar{\psi}(y, k)]}$$

Теперь первое равенство в (4.21) следует из (4.8). Остальные равенства доказываются аналогично, либо следуют из (3.24) и (4.7). Заметим, что попутно мы доказали, что  $s(x, y, k)$  удовлетворяет (3.3) по переменной  $y$ .

С помощью решения  $s(x, y, k)$  строится функция Грина уравнения (3.3):

$$G(x, y, k) = -\theta(x - y)s(x, y, k), \quad (4.22)$$

поскольку, как следует из (3.3)

$$(L - k^2)G(x, y, k) = \delta(x - y). \quad (4.23)$$

С помощью функции Грина любое решение  $f(x)$  неоднородного уравнения

$$(L - k^2)f(x) = g(x) \quad (4.24)$$

записывается в виде

$$f(x) = f_0(x) + \int dx' G(x, x', k)g(x'), \quad (4.25)$$

где  $f_0(x)$  – решение однородного уравнения и предполагается, что интеграл по  $x'$  сходится. В частности, пусть  $\tilde{\varphi}(x, k)$  – решение Йоста, заданное условием (3.4) и отвечающее некоторому новому потенциалу  $\tilde{u}$ . Тогда интегральное уравнение для него можно записать как задачу рассеяния на фоне исходного потенциала  $u$ :

$$\tilde{\varphi}(x, k) = \varphi(x, k) + \int_{-\infty}^x dy s(x, y, k) (\tilde{u}(y) - u(y)) \tilde{\varphi}(y, k). \quad (4.26)$$

Отсюда следует, в частности, выражение для вариационных производных функций Йоста:

$$\frac{\delta\varphi(x, k)}{\delta u(y)} = s(x, y, k)\varphi(y, k)\theta(x - y), \quad (4.27)$$

$$\frac{\delta\psi(x, k)}{\delta u(y)} = -s(x, y, k)\psi(y, k)\theta(y - x), \quad (4.28)$$

где второе равенство выведено аналогично.

**Задача 9** Доказать (4.5).

**Задача 10** Доказать (4.21).

## 5 Лекция 5

### 5.1 Дискретный спектр

Рассмотрим дискретный спектр:

$$Ly_n(x) = \lambda_n y_n(x), \quad (5.1)$$

где  $y_n(x) \not\equiv 0$  и  $y_n(x) \in \mathcal{L}_2$ :

$$\int dx |y_n(x)|^2 < \infty \quad (5.2)$$

Поскольку оператор  $L$  — самосопряженный, то все собственные значения вещественны. Действительно,

$$\lambda_n \int dx |y_n(x)|^2 = \int dx \overline{y_n(x)} Ly_n(x) = \bar{\lambda}_n \int dx |y_n(x)|^2,$$

так что

$$\lambda_n = \bar{\lambda}_n. \quad (5.3)$$

Предположим, что  $\lambda_n = k^2 \geq 0$ . Тогда, как мы знаем, решения осциллируют на бесконечности как  $\sim e^{ikx}$  (или имеют линейное поведение при  $k = 0$ ), а тем самым не принадлежат  $\mathcal{L}_2$ . Итак

$$\lambda_n = -\kappa_n^2, \quad (5.4)$$

причем для определенности будем считать, что

$$\kappa_n > 0. \quad (5.5)$$

Пусть  $p \in \mathbb{R}$  и пусть  $p > 0$ . Как мы знаем:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x, ip) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x, -ip) = 0. \quad (5.6)$$

На противоположных бесконечностях:

$$\varphi(x, ip) = a(ip)e^{px} + o(e^{px}), \quad p > 0, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (5.7)$$

$$\psi(x, -ip) = a(ip)e^{-px} + o(e^{-px}), \quad p > 0, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (5.8)$$

Итак, для убывания одного из этих решений (а тогда и обоих) на обеих бесконечностях необходимо, чтобы

$$a(i\kappa_n) = 0. \quad (5.9)$$

Введем обозначения:

$$\varphi_n(x) = \varphi(x, i\kappa_n), \quad \psi_n(x) = \bar{\psi}(x, i\kappa_n) = \psi(x, -i\kappa_n). \quad (5.10)$$

Ввиду (5.9) это означает, что эти решения пропорциональны друг другу, т.е. существуют такие константы  $b_n$ , что

$$\varphi_n(x) = b_n \psi_n(x), \quad (5.11)$$

причем в силу вещественности решений, эти константы также вещественны. Теперь в силу (5.11) мы видим, что условие (5.9) также и достаточно, чтобы

$\varphi_n(x)$  или  $\psi_n(x)$  были собственными функциями, поскольку они стремятся к нулю на противоположных бесконечностях:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} b_n e^{-\kappa_n x}, & x \rightarrow +\infty \\ e^{\kappa_n x}, & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (5.12)$$

Равенство (5.9) определяет  $\kappa_n$  как условие существования убывающего решения уравнения

$$(L + \kappa_n^2)\varphi_n(x) = 0. \quad (5.13)$$

Покажем, что нули  $a(k)$  простые. Продифференцируем для этого по  $k$  уравнение Штурма–Лиувилля на решение Йоста. Тогда

$$(L + \kappa_n^2)\varphi_k(x, i\kappa_n) = 2i\kappa_n \varphi(x, i\kappa_n). \quad (5.14)$$

В силу (3.9) и (3.30) мы имеем асимптотическое поведение

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{ikx} \varphi(x, k) = a(k), \quad \text{Im} k > 0, \quad (5.15)$$

так что

$$\varphi_k(x, i\kappa_n) = a'(i\kappa_n) e^{\kappa_n x} + o(e^{\kappa_n x}), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (5.16)$$

хотя, строго говоря, эту асимптотику следует выводить из (3.26), чтобы избежать предположения о дифференцируемости асимптотики (5.15). Теперь, перебрасывая в силу (5.15) и (5.16) производные, получаем

$$\int dx \varphi(x, i\kappa_n) \partial_x^2 \varphi_k(x, i\kappa_n) = 2b_n \kappa_n a'(i\kappa_n) + \int dx \varphi_k(x, i\kappa_n) \partial_x^2 \varphi(x, i\kappa_n),$$

так что по (5.14)

$$\int dx \varphi(x, i\kappa_n) (L + \kappa_n^2) \varphi_k(x, i\kappa_n) = -2\kappa_n a'(i\kappa_n) b_n.$$

Тогда

$$\int dx \varphi(x, i\kappa_n)^2 = ia'(i\kappa_n) b_n.$$

Левая часть этого равенства положительна, так что  $\text{Im}(ia'(i\kappa_n)) = 0$  и

$$a'(i\kappa_n) \neq 0, \quad (5.17)$$

причем

$$\text{sgn}(ia'(i\kappa_n)) = \text{sgn} b_n. \quad (5.18)$$

Отсюда следует, в частности, что  $s(x, y, k)$  не имеет особенностей при  $k = i\kappa_n$ .

## 5.2 Дисперсионное соотношение.

Введем функцию

$$a_1(k) = a(k) \prod_{n=1}^N \frac{k + i\kappa_n}{k - i\kappa_n}, \quad (5.19)$$

Для  $k \in \mathbb{R}$ :  $|a_1(k)| = |a(k)|$ . Эта функция продолжается в верхнюю полуплоскость по переменной  $k$  и по доказанному ранее, не имеет там нулей. Поэтому функция  $\ln a_1(k)$  аналитична в  $\text{Im} k > 0$ , и убывает на бесконечности:

$\ln a_1(k) \rightarrow 0$ ,  $|k| \rightarrow \infty$ . Тогда в силу леммы Жордана для любого  $k$  в нижней полуплоскости,  $\text{Im}k < 0$ , выполняется тождественно

$$\int dk' \frac{\ln a_1(k')}{k' - k} = 0,$$

так что в пределе  $\text{Im}k \rightarrow -0$ , получаем:

$$\int dk' \frac{\ln a_1(k')}{k' - k + i0} = 0. \quad (5.20)$$

Далее, как известно

$$\ln a_1(k) = \ln |a_1(k)| + i \arg a_1(k), \quad (5.21)$$

а также имеется формула Сохоцкого–Вейрштрассе:

$$\frac{1}{k \pm i0} = \wp \frac{1}{k} \mp i\delta(k), \quad k \in \mathbb{R}, \quad (5.22)$$

где использованы стандартные обозначения для обобщенных функций вещественной переменной  $k$ :  $\frac{1}{k \pm i0}$  как предела из верхней/нижней полуплоскости,  $\wp \frac{1}{k}$  в смысле главного значения и дельта функции  $\delta(k)$ . Поэтому вещественная часть тождества (5.20) дает

$$\arg a_1(k) = -\frac{1}{\pi} \wp \int dk' \frac{\ln |a_1(k')|}{k' - k}.$$

Таким образом:

$$a_1(k) = \exp \left\{ \ln |a(k)| - \frac{i}{\pi} \wp \int dk' \frac{\ln |a(k')|}{k' - k} \right\},$$

что можно переписать в виде

$$a_1(k) = \exp \left\{ -\frac{i}{\pi} \int dk' \ln |a(k')| \left( \wp \frac{1}{k' - k} + i\pi\delta(k' - k) \right) \right\},$$

т.е. в силу (5.22) как

$$a_1(k) = \exp \left\{ \frac{-i}{\pi} \int dk' \frac{\ln |a(k')|}{k' - k - i0} \right\}.$$

Значит, по (4.16),

$$a(k) = \prod_{n=1}^N \frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n} \exp \left( \frac{i}{2\pi} \int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k' - k - i0} \right), \quad \text{Im}k = 0, \quad (5.23)$$

или

$$a(k) = \prod_{n=1}^N \frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n} \exp \left( \frac{i}{2\pi} \int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k' - k} \right), \quad \text{Im}k > 0. \quad (5.24)$$

Итак,  $a(k)$  восстанавливается по  $|r(k)|$  и набору  $\kappa_1, \dots, \kappa_N$ . Теперь и  $b(k)$  можно тоже восстановить по  $r(k)$  и набору  $\kappa_1, \dots, \kappa_N$ :

$$b(k) = r(k)a(k). \quad (5.25)$$

Из дисперсионного соотношения следует много полезных фактов. Например, что эта функция вещественна при чисто мнимых значениях аргумента,  $\text{Im}(a(ip)) = 0$ , поскольку

$$a(ip) = \prod_{n=1}^N \frac{p - \kappa_n}{p + \kappa_n} \exp \left\{ \frac{p}{2\pi} \int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k'^2 + p^2} \right\}, \quad p > 0. \quad (5.26)$$

Удобно упорядочить собственные значения уравнения (5.1) так, чтобы

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N, \quad (5.27)$$

так что по (5.4):

$$\kappa_1 > \kappa_2 > \dots > \kappa_N. \quad (5.28)$$

Тогда из (5.26) имеем :

$$\text{sgn } a(ip) = \begin{cases} +1, & p > \kappa_1, \\ (-1)^n, & \kappa_n > p > \kappa_{n+1}, \quad n = 1, \dots, N-1, \\ (-1)^N, & \kappa_N > p. \end{cases} \quad (5.29)$$

Боле того, для производной получаем, что

$$ia'(i\kappa_n) = \frac{1}{2\kappa_n} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \frac{\kappa_n - \kappa_m}{\kappa_n + \kappa_m} \exp \left\{ \frac{\kappa_n}{2\pi} \int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k'^2 + \kappa_n^2} \right\}, \quad (5.30)$$

так что

$$\text{sgn}(ia'(i\kappa_n)) = (-1)^n, \quad (5.31)$$

а тогда по (5.18) и

$$b_n = (-1)^{n-1} |b_n|. \quad (5.32)$$

Точно также, по (4.2) получаем, что

$$c = (-1)^N |c|. \quad (5.33)$$

## 6 Лекция 6

### 6.1 “Явные” формулы для $\kappa_n$ и $b_n$ .

Равенства (3.27), (3.28) и (3.31), (3.32) можно рассматривать как нелинейное обобщение преобразования Фурье потенциала  $u(x)$ , где вместо экспонент  $e^{-ikx}$  выступают решения Йоста, которые, естественно, определяются тем же потенциалом  $u(x)$ . Аналоги таких соотношений имеются и для дискретных степеней свободы. Так, ввиду (3.27) и (3.31), равенство (5.9) означает, что  $\kappa_n$  можно определить как решения уравнения

$$2\kappa_n = - \int dy e^{-\kappa_n y} \varphi_n(y) u(y) = 0, \quad (6.1a)$$

$$\text{или } 2\kappa_n = - \frac{1}{2\kappa_n} \int dy e^{\kappa_n y} \psi_n(y) u(y) = 0, \quad (6.1b)$$

а значения решений Йоста в этих точках (см. (5.10)) даются как решения интегральных уравнений, которые вытекают из (3.7) и (3.8):

$$\varphi_n(x) = e^{\kappa_n x} + \int_{-\infty}^x dy \frac{\text{sh } \kappa_n(x-y)}{\kappa_n} u(y) \varphi_n(y), \quad (6.2a)$$

$$\psi_n(x) = e^{-\kappa_n x} - \int_x^{\infty} dy \frac{\text{sh } \kappa_n(x-y)}{\kappa_n} u(y) \psi_n(y). \quad (6.2b)$$

Первое равенство здесь можно записать как

$$\varphi_n(x) = - \int dy \frac{e^{\kappa_n(x-y)}}{2\kappa_n} u(y) \varphi_n(y) + \int_{-\infty}^x dy \frac{e^{\kappa_n(x-y)} - e^{-\kappa_n(x-y)}}{2\kappa_n} u(y) \varphi_n(y),$$

а потому в силу (6.1) эти значения решений Йоста являются также решениями однородных интегральных уравнений:

$$\varphi_n(x) = - \int dy \frac{e^{-\kappa_n|x-y|}}{2\kappa_n} u(y) \varphi_n(y), \quad \psi_n(x) = - \int dy \frac{e^{-\kappa_n|x-y|}}{2\kappa_n} u(y) \psi_n(y), \quad (6.3)$$

где второе равенство выводится аналогично. Далее, сравнивая интегральные уравнения (6.2), легко получить (Задача 11), что коэффициент  $b_n$  в (3.24) равен

$$b_n = \frac{-1}{2\kappa_n} \int dy e^{\kappa_n y} u(y) \varphi_n(y). \quad (6.4)$$

Заметим, что это значение совпадает с формальным продолжением выражения (3.28) в точку  $k = i\kappa_n$ . Однако, такое продолжение существует лишь для узкого класса потенциалов, например, убывающих на бесконечности быстрее любой линейной экспоненты. В общем же случае потенциалов, удовлетворяющих (3.1) или (3.2), такое продолжение не существует.

**Задача 11** Доказать (6.4).

## 7 Лекция 7

### 7.1 Обратная задача.

#### 7.1.1 Спектральные данные.

Введем вместо  $b_n$  новые переменные

$$\beta_n = \frac{b_n}{ia'(i\kappa_n)} > 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad (7.1)$$

которые удобны тем, что в силу (5.18) они положительны. В качестве спектральных данных мы выбираем

$$S = \{r(k), \kappa_n, \beta_n, n = 1, \dots, N\}. \quad (7.2)$$

Потенциалы, которым отвечает нулевой коэффициент прохождения:

$$r(k) \equiv 0, \quad (7.3)$$

называются **безотражательными**.

Как мы видели ранее, по данным рассеяния однозначно восстанавливаются элементы матрицы монодромии  $a(k)$ ,  $b(k) = a(k)r(k)$  и  $b_n = i\beta_n a'(i\kappa_n)$ . Покажем, что по ним также однозначно восстанавливается и потенциал.

В работе 1951 года И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана (и примерно в это же время работа В. А. Марченко) сформулирована процедура решения обратной задачи восстановления дифференциального уравнения второго порядка по его спектральной функции. Получены знаменитые уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко, решающие обратную задачу. Т.е. линейные уравнения, позволяющие найти решения Йоста (а тогда и потенциал в силу (3.16)) по заданным спектральным данным. Этот подход был создан до того, как возникла идея применения его к теории нелинейных интегрируемых уравнений и он оказал очень сильное влияние на успех всего метода обратной задачи рассеяния. Однако здесь мы остановимся на более общем подходе, основанном на решении задачи Римана–Гильберта, который применим для большинства интегрируемых уравнений.

#### 7.1.2 Общая формулировка задачи Римана–Гильберта.

Георг Фридрих Бернхард Риман (нем. Georg-Friedrich-Bernhard Rieman, 17 сентября 1826, Брезеленц, Ганновер — 20 июля 1866, Селаска, Италия, близ Лаго-Маджоре) — немецкий математик. За свою короткую жизнь (всего 10 лет трудов) он преобразовал сразу несколько разделов математики. С его именем связаны: гипотеза Римана о нулях дзета-функция Римана, интеграл Римана, производная Римана, риманова геометрия, риманова поверхность, сфера Римана, тензор кривизны Римана, теорема Римана об отображении, теорема Римана об условно сходящихся рядах, теорема Римана об устранимой особой точке, условия Коши–Римана, задача Римана.

Давид Гильберт (нем. David Hilbert; 23 января 1862, Велау (Кенигсберг), Германия (Знаменск Калининградской обл.) — 14 февраля 1943, Геттинген, Германия) — немецкий математик-универсал,

внес значительный вклад в развитие многих областей математики. В 1910—1920-е годы (после смерти Анри Пуанкаре) был признанным мировым лидером математиков. Основные направления исследований: теория инвариантов, теория алгебраических чисел, основания геометрии, принцип Дирихле и примыкающие к нему проблемы вариационного исчисления и дифференциальных уравнений, теория интегральных уравнений, проблема Варинга в теории чисел, математическая физика.

Задача Римана: найти аналитическую в некоторой области функцию по заданному соотношению между граничными значениями ее действительной и мнимой частей. Впервые такая задача была поставлена в 1857 Б. Риманом. Д. Гильберт исследовал граничную задачу в следующей постановке (задача Римана–Гильберта): найти функцию  $M_+(z) = u + iv$  аналитическую в односвязной области  $S_+$ , ограниченной контуром  $C$ , непрерывную в  $S_+ \cup C$  по граничному условию  $\operatorname{Re}[(a(z) + ib(z))M(z)] = c(z)$ ,  $z \in C$ , где  $a$ ,  $b$  и  $c$  – заданные на  $C$  действительные непрерывные функции. По теореме Римана об отображении достаточно рассмотреть случай, когда  $C$  – единичная окружность. Тогда можно искать  $M_+(z)$  вместе с ее шварцевским отражением  $M_-(z) = \overline{M_+(\bar{z}^{-1})}$ . Поскольку  $z = 1/\bar{z}$  на  $C$ , то на этом контуре предыдущее условие сводится к

$$\frac{a(z) + ib(z)}{2}M_+(z) + \frac{a(z) - ib(z)}{2}M_-(z) = c(z).$$

Итак, проблема сводится к построению пары аналитических функций  $M_+(z)$  и  $M_-(z)$  внутри и снаружи единичного диска, соответственно, таких что на контуре выполнено указанное условие плюс нормировка на бесконечности, которая следует из:  $\lim_{z \rightarrow \infty} M_-(z) = \overline{M_+(0)}$ .

## 7.2 Задача Римана–Гильберта и восстановление потенциала оператора Штурма–Лиувилля

Покажем, что обратная задача, т.е. задача восстановления потенциала в уравнении Штурма–Лиувилля по данным рассеяния, является специальным случаем задачи Римана–Гильберта. В силу (3.9) перепишем (3.24) в виде

$$\frac{\chi_+(x, k)}{a(k)} = \chi_-(x, k) + r(k)\overline{\chi_-(x, k)}e^{2ikx}. \quad (7.4)$$

Введем функцию комплексного переменного

$$X(x, k) = \begin{cases} \frac{\chi_+(x, k)}{a(k)}, & \operatorname{Im}k > 0 \\ \chi_-(x, k), & \operatorname{Im}k < 0 \end{cases}, \quad (7.5)$$

и пусть  $X_{\pm}(k) = \lim_{\epsilon \rightarrow \pm 0} X(k + i\epsilon)$ , где  $k \in \mathbb{R}$ . Функция  $X(k)$  аналитична в нижней полуплоскости, мероморфна в верхней и имеет там полюса в точках  $k = i\kappa_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ . Введем

$$\gamma_n(x) = -ie^{\kappa_n x} \operatorname{res}_{k=i\kappa_n} X(x, k), \quad (7.6)$$

что по (3.9) и (7.5) дает

$$\gamma_n(x) = \frac{\chi_+(x, i\kappa_n)e^{\kappa_n x}}{ia'(i\kappa_n)} \equiv \frac{\varphi(x, i\kappa_n)}{ia'(i\kappa_n)}. \quad (7.7)$$

На вещественной оси эта функция, как следует из (7.4), имеет разрыв:

$$X_+(x, k) - X_-(x, k) = r(k)\overline{X}_-(x, k)e^{2ikx}, \quad \text{Im}k = 0. \quad (7.8)$$

Чтобы удалить полюсные особенности, рассмотрим

$$\tilde{X}(x, k) = X(x, k) - i \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n(x)e^{-\kappa_n x}}{k - i\kappa_n}. \quad (7.9)$$

Эта функция аналитична в верхней и нижней полуплоскостях и имеет тот же разрыв на вещественной оси, что и (7.8):

$$\tilde{X}_+(x, k) - \tilde{X}_-(x, k) = r(k)\overline{X}_-(x, k)e^{2ikx}, \quad \text{Im}k = 0. \quad (7.10)$$

Кроме того в силу (3.16), (3.33), (3.29) и (7.4) выполнено асимптотическое поведение

$$\tilde{X}(x, k) \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty. \quad (7.11)$$

Тогда по формуле Лиувилля

$$\tilde{X}(x, k) - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{\tilde{X}_+(x, k') - \tilde{X}_-(x, k')}{k' - k}, \quad (7.12)$$

так что по (7.9)

$$\begin{aligned} X(x, k) &= 1 + i \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n(x)e^{-\kappa_n x}}{k - i\kappa_n} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{r(k')\overline{X}_-(x, k')e^{2ik'x}}{k' - k}, \quad \text{Im}k \neq 0. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Переходя к пределам на вещественной оси, получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\chi_+(x, k)}{a(k)} &= 1 + i \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n(x)e^{-\kappa_n x}}{k - i\kappa_n} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{r(k')\overline{X}_-(x, k')e^{2ik'x}}{k' - k - i0}, \quad \text{Im}k = 0 \end{aligned} \quad (7.14)$$

и

$$\begin{aligned} \chi_-(x, k) &= 1 + i \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n(x)e^{-\kappa_n x}}{k - i\kappa_n} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{r(k')\overline{X}_-(x, k')e^{2ik'x}}{k' - k + i0}, \quad \text{Im}k = 0. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Перейдем к решениям Йоста. Тогда вместо (7.14) мы имеем при  $\text{Im}k = 0$

$$\frac{\varphi(x, k)}{a(k)} = e^{-ikx} + i \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n(x) e^{i(\kappa_n - k)x}}{k - i\kappa_n} + \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{r(k') e^{i(k' - k)x} \bar{\psi}(x, k')}{k' - k - i0}, \quad (7.16)$$

а вместо (7.15)

$$\psi(x, k) = e^{-ikx} + i \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n(x) e^{-i(k - i\kappa_n)x}}{k - i\kappa_n} + \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{r(k') e^{i(k' - k)x} \bar{\psi}(x, k')}{k' - k + i0}. \quad (7.17)$$

Первое из них определяет  $\varphi(x, k)$ , если известны  $\psi(x, k)$  и  $\gamma_n(x)$ . Для того, чтобы второе равенство превратилось в интегральное уравнение на  $\psi(x, k)$ , воспользуемся (7.7), которое в силу (7.1) и (5.11) дается в виде

$$\gamma_n(x) = \beta_n \psi(x, -i\kappa_n). \quad (7.18)$$

Иными словами мы связали вычеты в полюсах функции  $X$  в верхней полуплоскости с ее значениями в нижней. Продолжая (7.17) в нижнюю полуплоскость, мы получаем по (7.18)

$$\gamma_n(x) = \beta_n \left\{ e^{-\kappa_n x} - \sum_{m=1}^N \frac{\gamma_m(x) e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x}}{\kappa_n + \kappa_m} + \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{r(k') e^{i(k' + i\kappa_n)x} \bar{\psi}(x, k')}{k' + i\kappa_n} \right\}, \quad (7.19)$$

что вместе с (7.17) дает уже замкнутую систему **уравнений обратной задачи** для функции  $\psi(x, k)$ . Можно доказать однозначную разрешимость этих уравнений в выбранном классе спектральных данных. Тогда потенциал  $u(x)$  восстанавливается по (3.33):

$$u(x) = \partial_x \left\{ 2 \sum_{n=1}^N \gamma_n(x) e^{-\kappa_n x} + \frac{1}{\pi} \int dk' r(k') e^{ik'x} \bar{\psi}(x, k') \right\}. \quad (7.20)$$

**Задача 12** \* Имеем систему уравнений (7.17) и (7.18). Рассмотрим предел этой системы при  $l \in \{1, \dots, N\}$ :  $\kappa_{l+1} = \kappa_l$  для некоторого  $l \in [1, N - 1]$ . Показать, что в этом пределе данная система сводится к такой же системе с заменой  $N \rightarrow N - 1$ , т.е., что вырождения собственного значения при  $k = i\kappa_l$  не возникает.

## 8 Лекция

### 8.1 Вывод уравнения Штурма–Лиувилля из уравнений обратной задачи.

Мы показали, что решение Йоста  $\psi(x, k)$  уравнения Штурма–Лиувилля удовлетворяет системе уравнений (7.17) и (7.19). Докажем теперь обратное утверждение: решение  $\psi(x, k)$  уравнений (7.17) и (7.19) удовлетворяет уравнению Штурма–Лиувилля с потенциалом, заданным по (7.20). Для этого продифференцируем указанные уравнения:

$$\begin{aligned}
 (\partial_x^2 + k^2)\psi(x, k) &= i \sum_n e^{-i(k-i\kappa_n)x} \left\{ \frac{(\partial_x^2 - \kappa_n^2)\gamma_n(x)}{k - i\kappa_n} - 2i\partial_x\gamma_n(x) + 2i\kappa_n(x)\gamma_n \right\} + \\
 &+ \frac{1}{2\pi i} \int dk' r(k') e^{i(k'-k)x} \left\{ \frac{(\partial_x^2 + k'^2)\bar{\psi}(x, k')}{k' - k + i0} + \right. \\
 &\left. + 2i\partial_x\bar{\psi}(x, k') - 2k'\bar{\psi}(x, k') \right\}, \\
 (\partial_x^2 - \kappa_n^2)\gamma_n(x) &= -\beta_n \sum_m e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x} \left\{ \frac{(\partial_x^2 - \kappa_m^2)\gamma_m(x)}{\kappa_n + \kappa_m} - 2\partial_x\gamma_m(x) + 2\kappa_m\gamma_m(x) \right\} + \\
 &+ \frac{\beta_n}{2\pi i} \int dk' r(k') e^{i(k'+i\kappa_n)x} \left\{ \frac{(\partial_x^2 + k'^2)\bar{\psi}(x, k')}{k' + i\kappa_n} + \right. \\
 &\left. + 2i\partial_x\bar{\psi}(x, k') - 2k'\bar{\psi}(x, k') \right\},
 \end{aligned}$$

что в силу (7.20) можно переписать как

$$\begin{aligned}
 (\partial_x^2 + k^2)\psi(x, k) &= e^{-ikx}u(x) + i \sum_n e^{-i(k-i\kappa_n)x} \frac{(\partial_x^2 - \kappa_n^2)\gamma_n(x)}{k - i\kappa_n} + \\
 &+ \frac{1}{2\pi i} \int dk' r(k') e^{i(k'-k)x} \frac{(\partial_x^2 + k'^2)\bar{\psi}(x, k')}{k' - k + i0}, \\
 (\partial_x^2 - \kappa_n^2)\gamma_n(x) &= \beta_n \left\{ e^{-\kappa_n x}u(x) - \sum_m e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x} \frac{(\partial_x^2 - \kappa_m^2)\gamma_m(x)}{\kappa_n + \kappa_m} + \right. \\
 &\left. + \frac{1}{2\pi i} \int dk' r(k') e^{i(k'+i\kappa_n)x} \frac{(\partial_x^2 + k'^2)\bar{\psi}(x, k')}{k' + i\kappa_n} \right\}.
 \end{aligned}$$

Итак мы видим, что функции  $(\partial_x^2 + k^2)\psi(x, k)$  и  $(\partial_x^2 - \kappa_n^2)\gamma_n(x)$  удовлетворяют уравнениям с тем же ядрами, что и функции  $\psi(x, k)$  и  $\gamma_n(x)$ , т.е. (7.17) и (7.19), но с неоднородными членами умноженными на  $u(x)$ . В силу однозначной разрешимости системы (7.17), (7.19), а также учитывая, что переменная  $x$  входит в ядра этой системы как параметр, получаем:

$$(\partial_x^2 + k^2)\psi(x, k) = u(x)\psi(x, k), \quad (\partial_x^2 - \kappa_n^2)\gamma_n(x) = u(x)\gamma_n(x). \quad (8.1)$$

Отметим, что равенство  $(\partial_x^2 + k^2)\varphi(x, k) = u(x)\varphi(x, k)$  можно вывести аналогично, либо с помощью (7.16).

## 8.2 Временная эволюция.

Итак, мы разобрали прямую задачу (левая стрелка вниз на диаграмме 2.1) и обратную задачу (правая стрелка вверх на диаграмме 2.1). Теперь, наконец, нам предстоит разобрать временную эволюцию данных рассеяния, эквивалентную тому, что  $u(x)$  зависит от  $t$  в силу уравнения (1.2). Последнее, как мы видели, эквивалентно выполнению представления Лакса (1.12), где оператор  $M$  определен в (2.3). Тогда, ввиду (2.4) и асимптотических условий (3.4) и (3.5), получаем:

$$\varphi_t(x, k) + M\varphi(x, k) = 4ik^3\varphi(x, k), \quad (8.2)$$

$$\psi_t(x, k) + M\psi(x, k) = 4ik^3\psi(x, k), \quad (8.3)$$

где  $k \in \mathbb{R}$ , но оба равенства допускают продолжения в соответствующие полуплоскости спектрального параметра. Далее, по (3.24), (8.2) и (8.3) находим, что

$$a_t(k)\psi(x, k) + b_t(k)\bar{\psi}(x, k) = 8ik^3b(k)\bar{\psi}(x, k), \quad k \in \mathbb{R},$$

что ввиду линейной независимости  $\psi(x, k)$  и  $\bar{\psi}(x, k)$  при  $k \neq 0$  дает эволюцию элементов матрицы монодромии:

$$a_t(k) = 0, \quad (8.4)$$

$$b_t(k) = 8ik^3b(k) \quad (8.5)$$

при  $k \in \mathbb{R}$ . Однако, ввиду того, что  $a(k)$  допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость  $k$ , равенство (8.4) выполняется также и при всех  $k \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im}k \geq 0$ . Таким образом функция  $a(k)$  есть порождающий функционал интегралов движения, которыми будут, например, все коэффициенты ее ряда Тейлора, или значения в различных точках этой полуплоскости. В частности, не зависят от времени и положения нулей этой функции, т.е.

$$\partial_t \kappa_n = 0. \quad (8.6)$$

Далее, из (5.11) и аналитических продолжений равенств (8.2) и (8.3) в соответствующие полуплоскости, следует, что

$$\partial_t b_n = 8\kappa_n^3 b_n. \quad (8.7)$$

Суммируя, для временной эволюции спектральных данных получаем:

$$r_t(k) = 8ik^3 r(k) \quad (8.8)$$

и

$$\partial_t \beta_n = 8\kappa_n^3 \beta_n. \quad (8.9)$$

Итак, при  $t$  отличном от нуля спектральные данные суть

$$S(t) = \left\{ e^{8ik^3 t} r(k), \quad \kappa_n, \quad e^{8\kappa_n^3 t} \beta_n \right\}. \quad (8.10)$$

Отметим, что в силу (8.8) и (8.6):

$$\partial_t |r(k)| = 0, \quad (8.11)$$

откуда следует (8.4) в силу (5.23).

Подставляя данные рассеяния (8.10) в уравнения обратной задачи, мы находим решение Йоста  $\psi(t, x, k)$ , отвечающее моменту  $t$  и, очевидно, совпадающее с исходным  $\psi(x, k)$  при  $t = 0$ . Так построенное решение Йоста удовлетворяет уравнению (8.3), однако проверка этого факта достаточно громоздка и мы ее здесь опускаем. А отсюда уже следует, что потенциал  $u(t, x)$ , восстановленный по (7.20), решает задачу Коши для уравнения КдФ. Итак, мы замкнули диаграмму 2.1, сведя решение нелинейной задачи к последовательному решению трех линейных задач, одна из которых решается явно. В этом и состоит общая схема метода обратной задачи рассеяния.

## 9 Лекция 9

### 9.1 Солитонные решения: $r \equiv 0$ .

В этом случае (7.17) сводится к

$$\psi(x, k) = e^{-ikx} + i \sum_n \frac{e^{i(\kappa_n - k)x} \gamma_n(x)}{k - i\kappa_n}, \quad (9.1)$$

а (7.20) — к

$$u(x) = 2\partial_x \sum_n e^{-\kappa_n x} \gamma_n(x). \quad (9.2)$$

Таким образом, уравнения обратной задачи в данном частном случае сводятся к системе **алгебраических** уравнений на функции  $\gamma_n$ . Действительно, вводя  $N \times N$  матрицу

$$A_{n,m} = \delta_{n,m} + \frac{e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x} \beta_n}{\kappa_n + \kappa_m}, \quad (9.3)$$

мы записываем (7.19) в виде

$$\sum_{m=1}^N A_{n,m} \gamma_m = \beta_n e^{-\kappa_n x}.$$

Отсюда

$$\gamma_n = \frac{\det A^{(n)}}{\det A}, \quad (9.4)$$

где матрица  $A^{(n)}$  получается из  $A$  заменой  $n$ -го столбца на столбец  $\beta_n e^{-\kappa_n x}$ . Подставляя (9.4) в (9.2), заметим что по правилу дифференцирования детерминантов:

$$\sum_n e^{-\kappa_n x} \det A^{(n)} = -\partial_x \det A,$$

так что окончательно для  $N$  солитонного решения получаем

$$u(x) = -2\partial_x^2 \ln \det A. \quad (9.5)$$

Поскольку в выражение (9.5) для потенциала входит только детерминант матрицы  $A$ , мы можем преобразовывать эту матрицу. Введем

$$\beta_n = 2\kappa_n e^{2\kappa_n q_n}. \quad (9.6)$$

Тогда по (9.3):

$$\begin{aligned} \det A &= \det \left[ \delta_{n,m} + \frac{2\kappa_n}{\kappa_n + \kappa_m} e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x + 8\kappa_n^3 t + 2\kappa_n q_n} \right] = \\ &= \det \left[ \text{diag} \left( \sqrt{\kappa_n} e^{4\kappa_n^3 t + \kappa_n q_n} \right) \right] \times \\ &\quad \times \det \left( \delta_{n,m} + \frac{2\sqrt{\kappa_n \kappa_m}}{\kappa_n + \kappa_m} e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x + 4(\kappa_n^3 + \kappa_m^3)t + (\kappa_n + \kappa_m)q_n} \right) \times \\ &\quad \times \det \left[ \text{diag} \left( \sqrt{\kappa_m^{-1}} e^{-4\kappa_m^3 t - \kappa_m q_m} \right) \right]. \end{aligned}$$

Первый и последний сомножители сокращают друг друга, так что

$$\det A = \det \left( \delta_{n,m} + \frac{2\sqrt{\kappa_n \kappa_m}}{\kappa_n + \kappa_m} e^{-\theta_n - \theta_m} \right),$$

где

$$\theta_n(t, x) = \kappa_n(x - q_n) - 4\kappa_n^3 t. \quad (9.7)$$

Более того, поскольку в (9.5) входит лишь вторая производная логарифма детерминанта матрицы  $A$ , то понятно, что преобразования матрицы, которые ведут к умножению ее на постоянную по  $x$ , или на линейную по  $x$  экспоненту не приводят к изменению потенциала. Будем обозначать преобразования матрицы  $A$ , которые сохраняют потенциал  $u(x)$  знаком  $\cong$ . В частности, как легко видеть

$$A \cong \left\| \delta_{m,n} + \frac{2\kappa_n}{\kappa_m + \kappa_n} e^{-2\theta_n} \right\|. \quad (9.8)$$

Рассмотрим свойства введенных солитонных решений.

## 9.2 Односолитонное решение, $N = 1$ .

В этом простейшем случае

$$\begin{aligned} \det A \equiv A &= 1 + \frac{\beta}{2\kappa} e^{-2\kappa(x-4\kappa^2 t)} = 1 + e^{-2\kappa(x-4\kappa^2 t - q)} = \\ &= 2e^{-\kappa(x-4\kappa^2 t - q)} \operatorname{ch} \kappa(x - 4\kappa^2 t - q), \end{aligned}$$

где мы использовали (9.6). Поэтому

$$\gamma = \frac{\beta e^{-\kappa x + 8\kappa^3 t}}{A} = \kappa e^{\kappa x} (1 - \operatorname{th} \kappa(x - 4\kappa^2 t - q))$$

$$\begin{aligned} \psi(x, k) &= e^{-ikx} \left( 1 + \frac{i\kappa}{k - i\kappa} (1 - \operatorname{th} \kappa(x - 4\kappa^2 t - q)) \right) = \\ &= \frac{e^{-ikx}}{k - i\kappa} (k - i\kappa \operatorname{th} \kappa(x - 4\kappa^2 t - q)) \end{aligned}$$

В данном случае  $a(k) = \frac{k-i\kappa}{k+i\kappa}$ ,  $a'(i\kappa) = \frac{1}{2i\kappa}$ ,  $b(k) \equiv 0$ , но  $b_1 = e^{2\kappa q_n} \neq 0$ , что наглядно демонстрирует, что  $b_1 \neq b(i\kappa_n)$ . Далее по (7.16)

$$\varphi(x, k) = \frac{e^{-ikx}}{k + i\kappa} (k - i\kappa \operatorname{th} \kappa(x - 4\kappa^2 t - q)).$$

Тогда

$$u(t, x) = -\frac{2\kappa^2}{\operatorname{ch}^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t - q)}.$$

Кроме того, мы имеем:

$$\chi_+(x, k) = \frac{k - i\kappa \operatorname{th} \kappa(x - 4\kappa^2 t - q)}{k + i\kappa}$$

и

$$\varphi(x, i\kappa) = \frac{e^{4\kappa^3 t + \kappa q}}{2 \operatorname{ch} \kappa x}.$$

### 9.2.1 Двусолитонное решение, $N = 2$ .

В данном случае

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 + e^{-2\kappa_1(x-q_1-4\kappa_1^2t)} & \frac{2\kappa_1}{\kappa_1+\kappa_2} e^{-(\kappa_1+\kappa_2)x+8\kappa_1^3t+2\kappa_1q_1} \\ \frac{2\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2} e^{-(\kappa_1+\kappa_2)x+8\kappa_2^3t+2\kappa_2q_2} & 1 + e^{-2\kappa_2(x-q_2-4\kappa_2^2t)} \end{vmatrix},$$

так что

$$\begin{aligned} \det A &= 1 + e^{-2\kappa_1(x-q_1-4\kappa_1^2t)} + e^{-2\kappa_2(x-q_2-4\kappa_2^2t)} + \\ &+ \left( \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \right)^2 e^{-2\kappa_1(x-q_1-4\kappa_1^2t)-2\kappa_2(x-q_2-4\kappa_2^2t)}. \end{aligned}$$

Введем

$$\theta_n = \kappa_n(x - q_n) - 4\kappa_n^3t + \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = \ln \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2}, \quad (9.9)$$

где по определению  $\varphi > 0$ . Тогда

$$\det A = \frac{2e^{-\theta_1-\theta_2}}{\kappa_1 + \kappa_2} \left[ (\kappa_1 - \kappa_2) \operatorname{ch}(\theta_1 + \theta_2) + (\kappa_1 + \kappa_2) \operatorname{ch}(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

и решение может быть записано в одной из следующих форм:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= -2\partial_x^2 \ln \left( (\kappa_1 - \kappa_2) \operatorname{ch}(\theta_1 + \theta_2) + (\kappa_1 + \kappa_2) \operatorname{ch}(\theta_1 - \theta_2) \right) = \\ &= -2\partial_x^2 \ln \left( \kappa_1 \operatorname{ch} \theta_1 \operatorname{ch} \theta_2 - \kappa_2 \operatorname{sh} \theta_1 \operatorname{sh} \theta_2 \right) = \\ &= -2(\kappa_1^2 - \kappa_2^2) \frac{\kappa_1^2 \operatorname{ch}^2 \theta_2 + \kappa_2^2 \operatorname{sh}^2 \theta_1}{(\kappa_1 \operatorname{ch} \theta_1 \operatorname{ch} \theta_2 - \kappa_2 \operatorname{sh} \theta_1 \operatorname{sh} \theta_2)^2}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Рассмотрим асимптотики этого решения на временной бесконечности. Для этого перепишем (9.10) в виде

$$u(t, x) = -2(\kappa_1^2 - \kappa_2^2) \frac{\frac{\kappa_1^2}{\operatorname{ch}^2 \theta_1} + \frac{\kappa_2^2 \operatorname{th}^2 \theta_1}{\operatorname{ch}^2 \theta_2}}{(\kappa_1 - \kappa_2 \operatorname{th} \theta_1 \operatorname{th} \theta_2)^2}.$$

Очевидно, что  $u(t, x) \rightarrow 0$ , если  $t \rightarrow \infty$  так, что обе величины  $\theta_1$  и  $\theta_2 \rightarrow \infty$ . Рассмотрим поэтому случай, когда  $t \rightarrow \infty$  так что либо  $\theta_1$ , либо  $\theta_2$  конечны. По определению

$$\theta_2 = 4\kappa_2(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)t + \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\theta_1 + \kappa_2(q_1 - q_2) + \frac{\varphi}{2\kappa_1}(\kappa_1 - \kappa_2).$$

Итак,

если  $\theta_1$  конечна, то  $\theta_2 \rightarrow \pm\infty$  при  $t \rightarrow \pm\infty$ ;

если  $\theta_2$  конечна, то  $\theta_1 \rightarrow \mp\infty$  при  $t \rightarrow \pm\infty$ .

таким образом, если  $\theta_1$  конечна при  $t \rightarrow \pm\infty$ , то

$$u(t, x) \rightarrow -\frac{2\kappa_1^2}{\left( \frac{\kappa_1 \operatorname{ch} \theta_1}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}} \mp \frac{\kappa_2 \operatorname{sh} \theta_1}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}} \right)^2}.$$

По (9.9)

$$\frac{\kappa_1}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}} = \operatorname{ch} \frac{\varphi}{2}, \quad \frac{\kappa_2}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}} = \operatorname{sh} \frac{\varphi}{2},$$

и окончательно

$$\text{если } \theta_1 \text{ ограничена и } t \rightarrow \pm\infty, \text{ то } u(t, x) \rightarrow -\frac{2\kappa_1^2}{\text{ch}^2(\theta_1 \mp \frac{\varphi}{2})}.$$

Аналогично получаем, что

$$\text{если } \theta_2 \text{ ограничена и } t \rightarrow \pm\infty, \text{ то } u(t, x) \rightarrow -\frac{2\kappa_2^2}{\text{ch}^2(\theta_2 \pm \frac{\varphi}{2})}.$$

Суммируя, мы видим, что независимо от способа стремления

$$\text{при } t \rightarrow -\infty : u(t, x) \rightarrow -\frac{2\kappa_1^2}{\text{ch}^2(\theta_1 + \frac{\varphi}{2})} - \frac{2\kappa_2^2}{\text{ch}^2(\theta_2 - \frac{\varphi}{2})},$$

$$\text{при } t \rightarrow +\infty : u(t, x) \rightarrow -\frac{2\kappa_1^2}{\text{ch}^2(\theta_1 - \frac{\varphi}{2})} - \frac{2\kappa_2^2}{\text{ch}^2(\theta_2 + \frac{\varphi}{2})}.$$

Действительно, если  $x$  и  $t$  стремятся к бесконечности так, что одна из  $\theta_n$  ограничена, то слагаемое в правой части, зависящее от другой  $\theta$  стремится к нулю, что дает полученный выше результат. Если же обе  $\theta_n$  стремятся к бесконечности, то мы имеем ноль слева и ноль справа. Полученная асимптотика с очевидностью демонстрирует, что солитоны сохраняют при взаимодействии свою форму и приобретают сдвиги фаз – изменения знака  $\varphi$ . Точно также ведут себя солитонные решения и в общем,  $N$ -солитонном случае.

### 9.3 Асимптотика по $t$ $N$ -солитонных решений (для желающих разобрать самостоятельно)

В дальнейшем нам потребуется детерминант

$$D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) = \det \left\| \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \right\|_{m,n=1}^l. \quad (9.11)$$

Покажем, что для него имеется явная формула:

$$D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) = \prod_{i=1}^l \frac{1}{2\kappa_i} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^l \frac{|\kappa_i - \kappa_j|}{\kappa_i + \kappa_j}. \quad (9.12)$$

Доказательство проводится по индукции. Очевидно, что при  $l = 1$  (9.11) дает  $D(\kappa_1) = (2\kappa_1)^{-1}$ , что совпадает с (9.12). Далее, для детерминанта (9.11) выполняется рекуррентная формула

$$D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) = \frac{D(\kappa_1, \dots, \kappa_{l-1})}{2\kappa_l} \prod_{j=1}^{l-1} \left( \frac{\kappa_i - \kappa_j}{\kappa_i + \kappa_j} \right)^2. \quad (9.13)$$

Чтобы доказать ее заметим, что

$$\begin{aligned} D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) &= \prod_{j=1}^l \frac{1}{\kappa_l + \kappa_j} \det \left\| \frac{\kappa_m + \kappa_l}{\kappa_m + \kappa_n} \right\|_{m,n=1}^l = \\ &= \prod_{j=1}^l \frac{1}{\kappa_l + \kappa_j} \det \left\| 1 + \frac{\kappa_l - \kappa_n}{\kappa_m + \kappa_n} \right\|_{m,n=1}^l, \end{aligned}$$

т.е. в последнем столбце ( $n = l$ ) стоят только единицы. Вычитая последний столбец из всех предыдущих и вынося множители  $\kappa_l - \kappa_n$  из всех столбцов с  $n \leq l - 1$ , получаем

$$D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) = \frac{1}{2\kappa_l} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\kappa_l - \kappa_j}{\kappa_l + \kappa_j} \det \begin{pmatrix} \left\| \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \right\|_{m,n=1}^{l-1} & \mathbf{1} \\ \frac{1}{\kappa_l + \kappa_n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычтем теперь последнюю строку из всех предыдущих:

$$D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) = \frac{1}{2\kappa_l} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\kappa_l - \kappa_j}{\kappa_l + \kappa_j} \det \begin{pmatrix} \left\| \frac{\kappa_l - \kappa_m}{(\kappa_m + \kappa_n)(\kappa_l + \kappa_n)} \right\|_{m,n=1}^{l-1} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{\kappa_l + \kappa_n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Вынося теперь  $\kappa_l - \kappa_m$  из всех строк и  $(\kappa_l + \kappa_n)^{-1}$  из всех столбцов мы получаем (9.13).

Теперь мы готовы исследовать асимптотику правой части (9.8), где  $\theta_n$  определены в (9.9). Когда обе переменные  $x$  и  $t$  стремятся к бесконечности в общем направлении, то и все  $\theta_n$  стремятся к  $+\infty$  или  $-\infty$ . Переупорядочим нумерацию так, чтобы в заданном направлении

$$\begin{aligned} \theta_n &\rightarrow +\infty, & n = 1, \dots, l \\ \theta_n &\rightarrow -\infty, & n = l + 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Тогда

$$\det A \cong \det \left\| \delta_{m,n} + \frac{2\kappa_n e^{-2\theta_n}}{\kappa_m + \kappa_n} \left| \delta_{m,n} e^{2\theta_n} + \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \right| \right\|,$$

Левая часть матрицы стремится к единичной матрице, а правая часть стремится к матрице типа введенной в (9.11), поэтому все это выражение стремится к  $D(\kappa_{l+1}, \dots, \kappa_N)0$ . По (9.12) эта величина отлична от нуля, поэтому по (9.5) и  $u(t, x) \rightarrow 0$  в общем направлении. Рассмотрим теперь случай, когда  $x$  и  $t$  стремятся к нулю так, что некоторое  $\theta_l$  фиксировано. Это означает, что

$$x = c + 4\kappa_l^2 t,$$

где  $c$  – некоторая константа.

$$\theta_n \Big|_{x=c+4\kappa_l^2 t} = \kappa_n(c - q_n) + 4\kappa_n(\kappa_l^2 - \kappa_n^2)t$$

и мы рассматриваем предел  $t \rightarrow \pm\infty$ . При этом далее мы, как обычно, будем полагать, что нумерация выбрана так, что  $\kappa_1 > \dots > \kappa_N$ . Тогда

$$\begin{aligned} \theta_n \Big|_{x=c+4\kappa_l^2 t} &= \begin{cases} -\infty, & n < l \\ +\infty & n > l \end{cases}, & t \rightarrow +\infty, \\ \theta_n \Big|_{x=c+4\kappa_l^2 t} &= \begin{cases} +\infty, & n < l \\ -\infty & n > l \end{cases}, & t \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

Запишем теперь интересующий нас детерминант в виде

$$\det A \cong \det \left\| \frac{\delta_{m,n}}{2\kappa_n} e^{2\theta_n} + \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \left| \delta_{m,n} + \frac{2\kappa_n e^{-2\theta_n}}{\kappa_m + \kappa_n} \right| \right\|.$$

Пусть  $t \rightarrow +\infty$ . В пределе в столбцах с  $(l+1)$ -го по  $N$ -ый стоит единичная матрица. Разлагая детерминант последовательно по всем этим столбцам, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ \theta_l = \text{const}}} \det A &\cong \begin{vmatrix} \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} & \frac{2\kappa_l e^{-2\theta_l}}{\kappa_m + \kappa_l} \\ \frac{1}{\kappa_l + \kappa_n} & 1 + e^{-2\theta_l} \end{vmatrix} = \\ &= D(\kappa_1, \dots, \kappa_{l-1}) + 2\kappa_l e^{-2\theta_l} D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) \cong \\ &\cong 1 + e^{-2\theta_l} \prod_{j=1}^{l-1} \left( \frac{\kappa_l - \kappa_j}{\kappa_l + \kappa_j} \right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, независимо от способа стремления на бесконечность, мы имеем, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \det A \cong \prod_{l=1}^N \left[ 1 + e^{-2\theta_l} \prod_{j=1}^{l-1} \left( \frac{\kappa_l - \kappa_j}{\kappa_l + \kappa_j} \right)^2 \right],$$

причем легко показать, что поправочные члены убывают экспоненциально.

Рассмотрим аналогично предел  $t \rightarrow -\infty$  при условии, что  $\theta_l = \text{const}$ . Тогда

$$\det A \cong \det \left\| \delta_{m,n} + \frac{2\kappa_n e^{-2\theta_n}}{\kappa_m + \kappa_n} \middle| \frac{\delta_{m,n} e^{2\theta_n}}{2\kappa_n} + \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \right\|.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow -\infty \\ \theta_l = \text{const}}} \det A &\cong \begin{vmatrix} 1 + \frac{2\kappa_l e^{-2\theta_l}}{\kappa_m + \kappa_l} & \frac{1}{\kappa_l + \kappa_n} \\ \frac{2\kappa_l e^{-2\theta_l}}{\kappa_l + \kappa_n} & \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \end{vmatrix} \cong \\ &\cong D(\kappa_{l+1}, \dots, \kappa_N) + 2\kappa_l e^{-2\theta_l} D(\kappa_l, \dots, \kappa_N). \end{aligned}$$

По аналогии с (9.13) можно показать, что

$$D(\kappa_l, \dots, \kappa_N) = \frac{D(\kappa_{l+1}, \dots, \kappa_N)}{2\kappa_l} \prod_{j=l+1}^N \left( \frac{\kappa_i - \kappa_j}{\kappa_i + \kappa_j} \right)^2, \quad (9.14)$$

так что

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \det A(t, x) \cong \prod_{l=1}^N \left[ 1 + e^{-2\theta_l} \prod_{j=l+1}^N \left( \frac{\kappa_l - \kappa_j}{\kappa_l + \kappa_j} \right)^2 \right].$$

Итак, по (9.5) мы окончательно получаем, что

$$u(t, x) = - \sum_{l=1}^N \frac{2\kappa_l^2}{\text{ch}^2(\theta_l - \varphi_l^\pm)}, \quad t \rightarrow \pm\infty, \quad (9.15)$$

где

$$\varphi_l^+ = \sum_{j=1}^{l-1} \ln \frac{|\kappa_l - \kappa_j|}{\kappa_l + \kappa_j} < 0, \quad \varphi_l^- = \sum_{j=l+1}^N \ln \frac{|\kappa_l - \kappa_j|}{\kappa_l + \kappa_j} < 0.$$

Полученный результат доказывает два замечательных свойства солитонных решений. Во-первых, каждое такое решение на обоих асимптотиках стремится к

сумме односолитонных решений. Во-вторых, рассеяние солитонов упруго: оно сводится лишь к изменению фаз солитонов, причем

$$\varphi_l^+ - \varphi_l^- = \sum_{j=1}^{l-1} \ln \frac{|\kappa_l - \kappa_j|}{\kappa_l + \kappa_j} - \sum_{j=l+1}^N \ln \frac{|\kappa_l - \kappa_j|}{\kappa_l + \kappa_j}.$$

В частности,

$$\varphi_1^+ - \varphi_1^- = \sum_{j=2}^N \ln \frac{\kappa_1 + \kappa_j}{\kappa_1 - \kappa_j},$$

и

$$\varphi_2^+ - \varphi_2^- = \sum_{j=3}^N \ln \frac{\kappa_2 + \kappa_j}{\kappa_2 - \kappa_j} - \ln \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2}.$$

На самом деле, легко показать, что оба указанных свойства, равно как и формулы для фаз имеют место и для общих решений, т.е. решений с ненулевым коэффициентом отражения. Иными словами, непрерывный спектр не дает вклада в рассеяние солитонов.

**Задача 13** Восстановить детали вывода равенств (8.1).

**Задача 14** Вывести асимптотику общего  $N$ -солитонного решения (необязательная задача).

## 10 Лекция 10

### 10.1 Интегралы движения.

Локальными полиномиальными интегралами движения называются выражения вида

$$I_n = \int P_n(u, u_x, u_{xx}, \dots, u_x^{(m)}) dx, \quad (10.1)$$

где  $P_n$  – полином  $n$ -ой степени от своих аргументов. Покажем, что уравнение КдФ обладает бесконечным набором таких, функционально независимых, интегралов. Поражающим функционалом таких интегралов является функция  $a(k)$ , которая, как было показано, не зависит от времени. В окрестности особенности по  $k$  спектральной задачи, т.е. на бесконечности в данном случае, коэффициенты ее асимптотического разложения могут быть вычислены. Для демонстрации этого, выберем  $k$  в верхней полуплоскости и достаточно большим: таким, что  $\varphi(x, k)$  не обращается в нуль (ввиду асимптотических свойств решения Йоста такое всегда возможно). Введем вместо  $\varphi(x, k)$  новую функцию  $\zeta(x, k)$  равенством

$$\varphi(x, k) = \exp \left\{ -ikx + \int_{-\infty}^x dx' \zeta(x', k) \right\}, \quad \text{Im} k > 0. \quad (10.2)$$

В силу условия на  $k$  правая часть не имеет нулей, а потому  $\zeta$  хорошо определена и не имеет особенностей в указанной области. В силу (3.30) имеем

$$\ln a(k) = \int dx \zeta(x, k), \quad (10.3)$$

а по (2.3) эта функция удовлетворяет уравнению Рикатти:

$$\zeta_x + \zeta^2 - u - 2ik\zeta = 0. \quad (10.4)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде асимптотического ряда при  $k \rightarrow \infty$

$$\zeta(x, k) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\zeta_j(x)}{(2ik)^j}, \quad k \in \mathbb{C}, \quad \text{Im} k > 0. \quad (10.5)$$

Легко видеть, что

$$\zeta_1(x) = -u(x), \quad (10.6)$$

и приравнявая коэффициенты при старших степенях, получаем рекуррентные соотношения:

$$\zeta_{j+1}(x) = \partial_x \zeta_j(x) + \sum_{k=1}^{j-1} \zeta_k(x) \zeta_{j-k}(x), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (10.7)$$

что показывает, что все коэффициенты  $\zeta_j(x)$ , последовательно определяемые по (10.7), действительно являются полиномами, локальными по  $u$  и ее производным. Для младших коэффициентов мы имеем:

$$\zeta_2(x) = -u_x, \quad \zeta_3(x) = -u_{xx} + u^2, \quad (10.8)$$

$$\zeta_4(x) = -u_{xxx} + 2\partial_x u^2, \quad (10.9)$$

$$\zeta_5(x) = -u_x^{(4)} + \partial_x^2 u^2 + u_x^2 + 2u_{xx}u - 2u^3, \quad (10.10)$$

Мы видим, что  $\zeta_2(x)$  и  $\zeta_4(x)$  – полные производные локальных выражений, а потому дают нули при интегрировании по всей оси. Покажем, что это справедливо для всех четных коэффициентов  $\zeta_{2j}(x)$ . Для этого запишем

$$\zeta(x, k) = \zeta_{\text{Re}}(x, k) + i\zeta_{\text{Im}}(x, k), \quad (10.11)$$

где обозначено

$$\zeta_{\text{Re}}(x, k) = \frac{\zeta(x, k) + \overline{\zeta(x, \bar{k})}}{2}, \quad \zeta_{\text{Im}}(x, k) = \frac{\zeta(x, k) - \overline{\zeta(x, \bar{k})}}{2i}, \quad (10.12)$$

т.е. мы сопрягаем только коэффициенты асимптотического ряда (10.5). Тогда в силу (10.4)

$$\partial_x \zeta_{\text{Im}} + 2\zeta_{\text{Re}} \zeta_{\text{Im}} - 2k\zeta_{\text{Re}} = 0. \quad (10.13)$$

Ввиду условия на  $k$  это равенство можно записать как

$$\zeta_{\text{Re}}(x, k) = -\frac{1}{2} \partial_x \ln(\zeta_{\text{Im}}(x, k) - k), \quad (10.14)$$

что доказывает, что  $\zeta_{\text{Re}}(x, k)$ , а значит и все четные коэффициенты ряда (10.5) суть полные производные локальных функций. Для  $\zeta_{\text{Re}}(x, k)$  аналогичного свойства нет, а потому мы вводим интегралы движения посредством равенств

$$I_{j-1} = \frac{1}{2} \int dx \zeta_{2j+1}(x), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (10.15)$$

В силу (10.6), (10.8), (10.9) и (10.10) для младших интегралов имеем явно:

$$I_{-1} = \frac{-1}{2} \int dx u(t, x), \quad I_0 = \frac{1}{2} \int dx u^2(t, x), \quad (10.16)$$

$$I_1 = \frac{-1}{2} \int dx (u_x^2 + 2u^3), \quad (10.17)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int dx (u_{xx}^2 - 5u^2 u_{xx} + 5u^4). \quad (10.18)$$

Итак, мы доказали в силу (10.2), (10.3) и (10.5), что выполнено асимптотическое разложение

$$\ln a(k) = \sum_{j=-1}^{\infty} \frac{2I_j}{(2ik)^{2j+3}}. \quad (10.19)$$

С другой стороны, в силу (5.24)

$$\ln a(k) = \sum_{n=1}^N \ln \frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n} + \frac{i}{2\pi} \int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k' - k}, \quad \text{Im} k > 0, \quad (10.20)$$

так что полагая, что  $r(k) \in \mathcal{S}$ , а также используя равенство  $|r(-k)| = |r(k)|$ , мы получаем явное выражение интегралов движения через данные рассеяния:

$$\ln a(k) = \sum_{j=-1}^{\infty} \frac{i}{k^{2j+3}} \left\{ \frac{2(-1)^j}{2j+3} \sum_{n=1}^N \kappa_n^{2j+3} - \frac{1}{\pi} \int dk k^{2(j+1)} \ln(1 - |r(k)|^2) \right\}, \quad (10.21)$$

что по (10.19) дает

$$I_j = \frac{2^{2j+3}(-1)^j}{2j+3} \sum_{n=1}^N \kappa_n^{2j+3} + (-1)^j \frac{2^{2(j+1)}}{\pi} \int dk k^{2(j+1)} \ln(1 - |r(k)|^2). \quad (10.22)$$

Подчеркнем, что интегралы движения зависят только от “половины” данных рассеяния: переменных  $|r(k)|$  и  $\kappa_n$ , но не зависят от  $\arg r(k)$  и  $\beta_n$  (переменные действие–угол).

Особого внимания заслуживают три младших интеграла:

$$Q = -2I_{-1} = \int dx u(t, x) = 4 \sum_{n=1}^N \kappa_n + \frac{2}{\pi} \int dk \ln(1 - |r(k)|^2), \quad (10.23)$$

$$P = I_0 = \frac{1}{2} \int dx u^2(t, x) = \frac{8}{3} \sum_{n=1}^N \kappa_n^3 + \frac{4}{\pi} \int dk k^2 \ln(1 - |r(k)|^2), \quad (10.24)$$

$$H = -I_1 = \int dx \left( \frac{1}{2} u_x^2 + u^3 \right) = \frac{-32}{5} \sum_{n=1}^N \kappa_n^5 + \frac{16}{\pi} \int dk k^4 \ln(1 - |r(k)|^2). \quad (10.25)$$

## 10.2 Скобки Гарднера и Магри

Замечательным свойством интегрируемых уравнений является наличие бесконечной иерархии не только интегралов движения, но и пуассоновых скобок. Мы приведем здесь только первый и второй члены этой иерархии, скобки Гарднера–Захарова–Фаддеева и Магри. Первая из них задается равенством

$$\begin{aligned} \{F(u), G(u)\}_0 &= \frac{1}{2} \int dx \left( \frac{\delta F}{\delta u(x)} \partial_x \frac{\delta G}{\delta u(x)} - \frac{\delta G}{\delta u(x)} \partial_x \frac{\delta F}{\delta u(x)} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{\delta F}{\delta u(+)} \frac{\delta G}{\delta u(-)} - \frac{\delta F}{\delta u(-)} \frac{\delta G}{\delta u(+)} \right), \end{aligned} \quad (10.26)$$

где использовано обозначение

$$\frac{\delta F}{\delta u(\pm)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\delta F}{\delta u(x)}. \quad (10.27)$$

Рассмотрим для простоты скобки на таких функционалах, что для по крайней мере одной из вариаций  $\frac{\delta F}{\delta u(\pm)}$  или  $\frac{\delta G}{\delta u(\pm)} = 0$ . Тогда (10.26) заметно упрощается:

$$\{F(u), G(u)\}_0 = \int dx \frac{\delta F}{\delta u(x)} \partial_x \frac{\delta G}{\delta u(x)}, \quad (10.28)$$

причем именно в таком виде она и была получена первоначально. Отсюда, в частности,

$$\{u(x), u(y)\}_0 = \delta'(x - y) \quad (10.29)$$

В силу (10.25) и (10.17)

$$H = -I_1 = \int dx \left( \frac{1}{2} u_x^2 + u^3 \right) \quad (10.30)$$

так что

$$\frac{\delta H}{\delta u(x)} = 3u^2 - u_{xx} \quad (10.31)$$

Динамика КдФ задается посредством

$$u_t = \{u, H\}_0 = \partial_x \frac{\delta H}{\delta u(x)} = \partial_x (3u^2 - u_{xx}) \quad (10.32)$$

так что по (10.23)

$$\{u(x), Q\}_0 = 0. \quad (10.33)$$

Однако, по (10.26) для произвольного функционала  $F(u)$  имеем:

$$\{F(u), Q\}_0 = \frac{\delta F}{\delta u(-)} - \frac{\delta F}{\delta u(+)}, \quad (10.34)$$

т.е. возникает поразительная ситуация, аналога которой для систем конечного числа свободы нет: скобка Пуассона  $Q$  с  $u(x)$  равна нулю, а с некоторыми функционалами от  $u(x)$  нулю не равна. Тем не менее  $Q$  часто называют аннулятором скобки Гарднера–Захарова–Фаддеева. Далее, легко видеть, что

$$\{u, P\}_0 = u_x, \quad (10.35)$$

т.е.  $P$  – генератор пространственных трансляций, а  $H$  в силу (10.32) – гамильтониан уравнения КдФ, дающий его динамику:  $u_t = \partial_x (3u^2 - u_{xx})$ .

Следующая в иерархии скобка, скобка Магри, задается посредством

$$\{F, G\}_1 = \int dx \int dy \frac{\delta F}{\delta u(x)} \left( -\frac{\delta'''(x-y)}{4} + \frac{u(x)+u(y)}{2} \delta'(x-y) \right) \frac{\delta G}{\delta u(y)}, \quad (10.36)$$

откуда

$$\{u(x), u(y)\}_1 = -\frac{\delta'''(x-y)}{4} + \frac{u(x)+u(y)}{2} \delta'(x-y). \quad (10.37)$$

Для этой скобки все интегралы сдвигаются:

$$2\{u(x), Q\}_1 = u_x(x), \quad 4\{u(x), P\}_1 = \partial_x (3u^2 - u_{xx}) = u_t, \quad (10.38)$$

так что гамильтонианом, порождающим КдФ, теперь будет бывший импульс. Заметим, что в отличие от  $H$  функционал  $P$  положительно определен. По отношению к обоим скобкам старшие интегралы порождают старшие уравнения иерархии КдФ, причем эволюции по отношению к старшим временам являются симметриями уравнения КдФ, или любого из старших уравнений.

**Задача 15** Показать прямым вычислением, что  $I_{-1} = \frac{-1}{2} \int dx u(t, x)$ ,  $I_0 = \frac{1}{2} \int dx u^2(t, x)$  и  $I_1 = \frac{-1}{2} \int dx (u_x^2 + 2u^3)$  суть интегралы движения уравнения КдФ,  $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ .

## 11 Вопросы к зачету

1. Пара Лакса для уравнения КдФ
2. Решения Йоста: определения и основные свойства (в т.ч. асимптотическое поведение по  $k$ )
3. Матрица монодромии
4. Данные рассеяния непрерывного спектра
5. Дискретный спектр: собственные значения и собственные функции, их связь с решениями Йоста
6. Дисперсионное соотношение
7. Спектральные данные, восстановление матрицы монодромии по спектральным данным
8. Вывод уравнений обратной задачи (задача Римана)
9. Вывод уравнения Штурма–Лиувилля из уравнений обратной задачи
10. Временная эволюция спектральных данных
11. Солитонные решения: общая формула
12. Одно- и двусолитонные решения
13. Скобки Гарднера–Захарова–Фаддеева и Магри.