

**Дискретная математика**  
**Листок 5**

ВШЭ, факультет математики  
первый курс, четвёртый модуль

*Листок можно сдавать до 21.04.2015.*

1. Многочлен Чебышева  $T_n$  определяется формулой  $\cos(n\varphi) = T_n(\cos\varphi)$ . Найдите выражение для производящей функции  $\sum_{n \geq 0} T_n(x)t^n$  в виде рациональной функции от  $x$  и  $t$ .

2. Докажите, что  $n$ -й многочлен Чебышева  $y = T_n(x)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$$

3. Экспоненциальные производящие функции для целочисленных последовательностей называются функциями Гурвица. Докажите, что результат подстановки функции Гурвица в функцию Гурвица является функцией Гурвица.

4. Вычислите производящую функцию от двух переменных для треугольника Моцкина.

5. Вычислите треугольник Бернулли—Эйлера по модулю 2.

Введём обозначения:

$\alpha_k$  – кратность восходящего ребра между строками с номерами  $k$  и  $k+1$ ,  
 $\beta_k$  – кратность нисходящего ребра между строками с номерами  $k+1$  и  $k$ ,  
 $\gamma_k$  – кратность горизонтального ребра в  $k$ -ой строке.

Докажите, что следующие распределения кратностей по рёбрам в треугольниках Дика и Моцкина приводят к указанным последовательностям в их основаниях и найдите дифференциальные уравнения на производящие функции от двух переменных для каждого из этих треугольников:

6. Если  $\alpha_k = k$ ,  $\beta_k = k + 1$ , то в основании треугольника Дика стоят числа Бернулли из треугольника Бернулли—Эйлера.

7. Если  $\alpha_k = 1$ ,  $\beta_k = k$ , то в основании треугольника Дика стоят числа факториалы нечетных чисел,  $(2n - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot (2n - 1)$ .

8. Если  $\alpha_k = \gamma_k = 1$ ,  $\beta_k = k$ , то в основании треугольника Моцкина стоят числа  $I_n$  – число инволюций (перестановок, квадрат которых есть тождественная перестановка) на множестве из  $n$  элементов,  $I_1 = 1$ ,  $I_2 = 2$ ,  $I_3 = 4$ ,  $I_4 = 10$ .

9. Если  $\alpha_k = \beta_k = k$ ,  $\gamma_k = 2k - 1$ , то в основании треугольника Моцкина стоят числа  $n!$

10. Если  $\alpha_k = k$ ,  $\beta_k = k + 1$ ,  $\gamma_k = 2k$ , то в основании треугольника Моцкина стоят числа  $(n + 1)!$