ЛИСТОК 3
Введение в алгебраическую геометрию - матфак ВШЭ
прием задач: 09.04.2015, 16.04.2015

Задачи могут частично повторять материалы лекций и семинаров (если прямым текстом требуется доказать какой-либо факт, который там упоминался, доказательство, конечно, нужно воспроизвести). Основное поле на всякий случай предполагается алгебраически замкнутым нулевой характеристики. Нормальность, нормализация и т.п. была целиком делегирована семинарам, за недостатком времени; в частности, пригодится теорема о существовании нормализации, а также тот факт, что нормальная область есть пересечение локализаций по простым идеалам высоты ≤ 1.

1) Покажите, что если два морфизма из приведенной схемы в отделимую совпадают на плотном открытом подмножестве, то они совпадают.

2) Докажите лемму, оставленную в качестве упражнения на лекции: если gf собственный и g отделимый, то f собственный. Докажите, что если $f : X \to Y$ сюръекция S-схем, причем X собственна над S, а Y отделима и конечного типа над S, то и Y собственна над S.

3) Докажите, что любое многообразие содержит открытое аффинное нормальное многообразие.

4) Рассмотрим отображение из $\mathbb{A}^2$ в $\mathbb{A}^4$, заданного формулой

$$(x, y) \to (x, xy, y(y-1), y^2(y-1)).$$

Найдите систему уравнений, определяющую образ. Покажите, что это конечный морфизм, докажите, что образ замкнут. Покажите, что это бирациональный морфизм. Исследуйте количество прообразов над каждой точкой. На каком множестве это изоморфизм? Используя теорему с семинарских занятий, покажите, что образ не нормален.

5) Используя теоремы из семинаров, покажите, что если рациональная функция на нормальном многообразии определена везде, кроме множества коразмерности 2, то это регулярная функция.

6) Пусть X, Y - многообразия над k (вариант: схемы над S, X целостная, а Y конечного типа), $x \in X$ точка (как схемы, т.е. не обязательно замкнутая). Покажите, что морфизм из $Spec\mathcal{O}_{X,x}$ в Y продолжается до морфизма из некоторой окрестности x в Y.

7) Пусть X, Y - многообразия над k (вариант: схемы конечного типа над нетеровой S), X нормальное, а Y собственное. Пусть $f : U \to Y$ -

морфизм, где $U \subset X$ - непустое открытое подмножество. Покажите, что существует открытое $V \supset U$, содержащее все точки коразмерности 1 в X, такое, что f продолжается на V (заметьте, что локальное кольцо такой точки - кольцо нормирования и воспользуйтесь валюативным критерием, а потом предыдущей задачей). Что это говорит нам об алгебраических кривых?

8) Используя теорему о примитивном элементе, докажите, что любое многообразие бирационально эквивалентно гиперповерхности. Выведите отсюда, что на любом многообразии есть неособые точки, и они образуют плотное открытое подмножество.

9) Докажите, что если гиперповерхность степени 3 имеет две особые точки, то соединяющая их прямая лежит на этой гиперповерхности. Что можно сказать о плоских кривых степени 3 с тремя особыми точками?

10) Доказать, что если гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ содержит линейное подпространство размерности $\geq n/2$, то она имеет особые точки.

11) Докажите, что $\mathcal{O}_X$-модуль $\mathcal{F}$ на схеме X квазикогерентен тогда и только тогда, когда любая точка имеет окрестность U, где есть точная последовательность пучков $\oplus_{i \in I} \mathcal{O}_U \to \oplus_{j \in J} \mathcal{O}_U \to \mathcal{F}|_U \to 0$; $\mathcal{F}$ когерентен на нетеровой X, если к тому же множество индексов J можно взять конечным.

12) Докажите, что когерентный пучок $\mathcal{F}$ на нетеровой схеме X локально свободен ранга n тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in X$ слой $\mathcal{F}_x$ - свободный $\mathcal{O}_{X,x}$-модуль ранга n.

13) Пусть $\mathcal{F}$ когерентный пучок на нетеровой схеме X. Назовем его рангом в точке $x \in X$ размерность векторного пространства $\mathcal{F}_x \otimes \kappa(x)$ (где $\kappa(x)$ - поле вычетов в x). Докажите, что подмножество точек, где ранг пучка не превосходит k , открыто в X ; в частности, ранг не меньше ранга в общей точке, если X целая.

14) Пусть $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ точная последовательность квазикогерентных пучков на аффинной схеме X. Докажите, что точна последовательность пространств сечений $0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{H}(X) \to 0$.