# Дискретная математика
## Семинар 11

ВШЭ, факультет математики
первый курс, четвёртый модуль

**1.** Пусть последовательность $a_n$ определена условиями

$$a_0 = a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+1} = (n+1)a_n - \binom{n}{2} a_{n-2} \text{ при } n > 1.$$

Докажите, что экспоненциальная производящая функция $A(s)$ для этой последовательности удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-s)A'(s) = (1 - \frac{s^2}{2})A(s).$$

и имеет вид $A(s) = (1-s)^{-1/2} e^{s/2+s^2/4}$.

**2.** Рассмотрим гипергеометрическую функцию

$$h(s) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 s + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 s^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 s^3 + \dots$$

Докажите, что

$$s(1-s)h''(s) + (1-2s)h'(s) - \frac{1}{4}h(s) = 0.$$

**3.** Докажите, что степенной ряд $\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{s^n}{n!}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$sy'' + (1-4s)y' - 2y = 0.$$

**4.** Докажите, что производящая функция $y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k! s^k$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$s^2 y'' + (3s-1)y' + y = 0.$$

**5.** Докажите, что функция $y(s) = \frac{\arcsin s}{(1-s^2)^{1/2}}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-s^2)y' - sy = 1$$

и найдите последовательность ее коэффициентов.

**6.** Выпишите дифференциальное уравнение первого порядка, которому удовлетворяет функция $e^{s^2} \int e^{-s^2}$ и найдите последовательность ее коэффициентов.