Листок 4. Уравнение теплопроводности

УРЧП, 3-4 курс, **3.04.2015**

4◇1 Постройте функцию Грина оператора $L = -\frac{d^2}{dx^2} + 1$ с граничными условиями $u'(0) = u'(l) = 0$.

4◇2 Решите задачу Коши:
а) $u_t = u_{xx} + 3t^2$, $u|_{t=0} = \sin x$;
б) $u_t = u_{xx} + u_{yy} + e^t$, $u|_{t=0} = \cos x \cdot \sin y$.

4◇3 При каких условиях на функцию $\varphi \in C_0^\infty((0,1))$ любое решение $u(x,t)$ в полуполосе $Q^\infty_{(0,1)}$ задачи
а) $u_t = u_{xx}$, $u|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0$, $u|_{t=0} = \varphi(x)$;
б) $u_t = u_{xx}$, $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0$, $t|_{t=0} = \varphi(x)$
обладает свойством $u(x,t) \to 0$ при $t \to +\infty$?

4◇4 Пусть $u(x,t)$ — решение задачи

$$u_t = u_{xx} - \alpha u + g(x), \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u(0,t) = u(l,t) = 0.$$

Докажите неравенства:
а) $\max_{x\in[0,l]} |u(x,t)| \leqslant \max_{x\in[0,l]} |\varphi(x)| \cdot e^{-\alpha t}$ в случае, если $g(x) \equiv 0$;
б) $\max_{x\in[0,l]} |u(x,t)| \leqslant \max_{x\in[0,l]} |\varphi(x)| \cdot e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha} \max_{x\in[0,l]} |g(x)|$.

4◇5 Пусть $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $u(0,t) = u(l,t) = 0$. Докажите, что $\max_{x\in[0,l]} |u(x,t)| \to 0$, $t \to \infty$.

4◇6 При каких $t > 0$ существует интеграл Пуассона, дающий решение задачи Коши

$$u_t = u_{xx}, \qquad u|_{t=0} = \varphi(x),$$

если требование ограниченности $\varphi(x)$ заменяется предположением

$$|\varphi(x)| \leqslant Me^{Kx^2}, \qquad M > 0, \quad K > 0?$$

4◇7 (Интеграл Дюамеля) Пусть функция $u(x,t,t_0)$ принадлежит классу C^2 при $x \in \mathbb{R}^n$, $t > t_0 > 0$. Докажите, что функция $u(x,t,t_0)$ при каждом $t_0 > 0$ является решением задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \qquad u|_{t=0} = f(x,t_0)$$

тогда и только тогда, когда функция

$$v(x,t,t_0) = \int_{t_0}^{t} u(x,t,\tau) d\tau$$

при каждом $t_0 \geqslant 0$ является решением задачи Коши

$$v_t = a^2 \Delta u + f(x,t), \qquad u|_{t=0} = 0.$$