

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ЛИСТОК 1

Крайний срок сдачи 13.05.2015

1. Найдите сумму ряда

$$1 + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\lambda^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\lambda^6 + \dots$$

2. Найдите наименьший возможный порядок линейного однородного дифференциального уравнения с рациональными коэффициентами имеющего одним из своих решений $f(z) = \sin z$, $g(z) = \ln z$, $h(z) = \ln z + \sqrt{z}$.
(три независимых случая, зачитывается только полная сдача всех трёх)

3.

- a. По заданным функциям $f(z), g(z)$ постройте линейное однородное дифференциальное уравнение с пространством решений $y(z) = af(z) + bg(z)$, где a, b произвольные комплексные числа.
- b. Найдите дифференциальное уравнение которому удовлетворяет вронскиан уравнения

$$y'' - \frac{\gamma + (1 + \alpha + \beta)z}{z(z-1)}y' + \frac{\alpha\beta}{z(z-1)}y = 0$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ и решите его.

4. Для уравнения

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0$$

- a. Найдите замену $y = \psi\tilde{y}$ приводящую уравнение к виду

$$\tilde{y}'' + Q(z)\tilde{y} = 0$$

- b. Постройте дифференциальное уравнение которому удовлетворяют все функции вида y_1/y_2 , где y_1, y_2 любые два ненулевые решения уравнения исходного уравнения.
- c. Для двух наперёд заданных функций $f(z), g(z)$ постройте дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют все функции вида

$$y(z) = \frac{af(z) + bg(z)}{cf(z) + dg(z)}$$

где a, b, c, d произвольные комплексные числа.

5. Определите тип особых точек уравнения, в регулярных особых точках найдите показатели, $\nu \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{CP}^1$

$$y'' + \frac{1}{z}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)y = 0$$

6. Для системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dz} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{z - a_i} Y$$

$Y \in \text{Mat}_p(\mathbb{C})$, $z \in \mathbb{CP}^1$ и решения с начальными данными $Y(0) = I$

- а. Покажите, что если вычеты $A_k \in \mathfrak{sl}(p, \mathbb{C})$, то $Y(z) \in \mathrm{SL}(p, \mathbb{C})$
- б. Покажите, что если вычеты $A_k \in \mathfrak{g}$, то $Y(z) \in G$, где $\mathfrak{g}$ алгебра Ли (матричной) группы Ли G над $\mathbb{C}$.

7.

- а. Найдите размерность множества фуксовых систем второго ранга с четырьмя особыми точками и фиксированными локальными диагонализуемыми $SL(2, \mathbb{C})$ -монодромиями.
- б. Найдите монодромию системы

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}}{z} + \frac{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -3/8 & -1/2 \end{pmatrix}}{z-1} \right) y$$

8. Докажите, что фазовый портрет голоморфного векторного поля в области в $\mathbb{C}$ не может иметь предельных циклов (изолированных замкнутых орбит)

9. Докажите, что все фазовые кривые квадратичного векторного поля $\dot{y} = ay^2$ в $\mathbb{C}$, $a \neq 0$, суть окружности и две полупрямых.

10. Рассмотрим произвольное линейное векторное поле в $\mathbb{C}^2$:

$$\dot{y} = Ay, \quad A \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2).$$

Покажите, что тавтологическая проекция $\mathbb{C}^2 \setminus 0 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ переводит его в голоморфное векторное поле на $\mathbb{CP}^1$, и особые точки последнего суть собственные прямые оператора A .

11. Нарисуйте фазовые портреты следующих векторных полей в $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= 2y; & \dot{y} &= iy; & \dot{y} &= e^{\frac{\pi i}{4}} y; & \dot{y} &= y^2; \\ \dot{y} &= y^3; & \dot{y} &= \frac{1}{y}; & \dot{y} &= y^3 + 1 \end{aligned}$$

(Зачитывается только полная сдача всех пунктов)