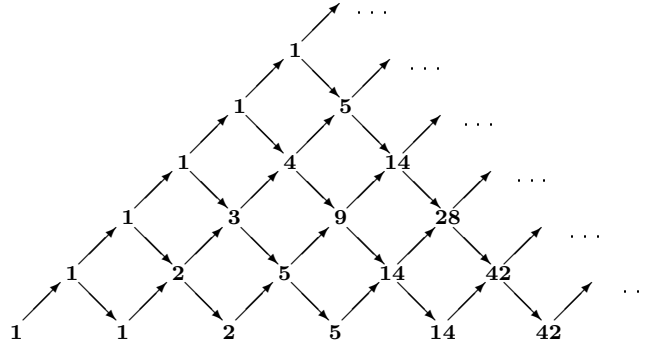


# Дискретная математика

## Семинар 12

ВШЭ, факультет математики  
первый курс, четвёртый модуль

1. Треугольник Дика состоит из чисел  $n_{i,j}$ ,  $0 \leq i \leq j$ , таких что  $n_{i,j}$  равно числу путей Дика из точки  $(0,0)$  в точку  $(i,j)$ . В частности,  $n_{i,j} \neq 0$  только если  $i + j$  чётно.



- а). Постройте производящие функции для последовательностей чисел, стоящих в 1-м и 2-м снизу горизонтальных рядах треугольника Дика.
- б). Постройте производящие функции для последовательностей чисел, стоящих в 3-м снизу горизонтальном ряду треугольника Дика.
- в). Постройте производящие функции для последовательностей чисел, стоящих в  $k$ -м снизу горизонтальном ряду треугольника Дика.
- г). Вычислите  $N(x, y) = \sum_{i,j \geq 0} x^i y^j n_{i,j}$ .

2. Непрерывные ломаные, составленные из векторов  $(1, 1)$  и  $(1, -2)$ , начинающиеся в начале координат  $(0, 0)$ , заканчивающиеся на оси абсцисс в точке  $(n, 0)$  и лежащие целиком в верхней полуплоскости, будем называть косыми путями Дика. Абсцисса  $n$  конечной точки пути называется его длиной. Обозначим через  $k_n$  число косых путей Дика длины  $n$ :  $k_0 = 1$ ,  $k_1 = k_2 = 0$ ,  $k_3 = 1$ ,  $k_4 = k_5 = 0$ ,  $k_6 = 3$ , ... Найдите уравнение, задающее производящую функцию  $K(s) = \sum_{n \geq 0} k_n s^n$  для косых путей Дика.

3. Пути Моцкина определяются так же, как и пути Дика, только они могут включать в себя горизонтальные векторы  $(1, 0)$ . Среди всех путей Моцкина выделим подмножество путей, не содержащих горизонтальных векторов в самом нижнем ряду. Числа таких путей, состоящих из  $n$  векторов образуют последовательность  $\mu_n$ :  $\mu_0 = 1$ ,  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $\mu_3 = 1$ ,  $\mu_4 = 3$ ,  $\mu_5 = 6$  и т.д. Найдите производящую функцию для этой последовательности.

4. Решите задачу 1 для треугольника Моцкина

