Листок 2. Изомонодромные деформации

спецкурс “Аналитическая теория дифференциальных уравнений”, **6.04.2015**

2◇1 **а)** Покажите, что собственные значения матриц $B_i(a)$, удовлетворяющих уравнению Шлезингера

$$dB_i(a) = -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{[B_i(a), B_j(a)]}{a_i - a_j} d(a_i - a_j), \qquad i = 1, \dots, n \tag{1}$$

не зависят от $a = (a_1, \dots, a_n)$.
б) Опишите вид фундаментальной матрицы и шлезингеровской изомонодромной деформции в случае, когда начальные матрицы $B_i(a^0)$, $i = 1, \dots, n$ попарно коммутируют.

2◇2 **а)** Докажите, что изомонодромная деформация Шлезингера системы

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z - a_i} \right) y \tag{2}$$

обладает тем свойством, что $\sum_{i=1}^{n} B_i(a) = \mathrm{const}$.
б) Опишите вид пропорциональной шлезингеровской деформации (1),(2), когда $a_i = ta_i^0$, $i = 1, \dots, n$, то есть зависящей от одного параметра t.

2◇3 Покажите, что шестое уравнение Пенлеве обрадает следующими симметриями:

$$P(t, w, \theta) = 0 \longrightarrow P(1 - t, 1 - w, \theta_1, \theta_0, \theta_2, \theta_3) = 0,$$
$$P(t, w, \theta) = 0 \longrightarrow P(1/t, 1/w, \theta_3 - \frac{1}{2}, \theta_1, \theta_2, \theta_0 + \frac{1}{2}) = 0,$$
$$P(t, w, \theta) = 0 \longrightarrow P(\frac{t}{t-1}, \frac{t-w}{t-1}, \theta_2, \theta_1, \theta_0, \theta_3) = 0,$$

где $\pm\theta_0, \pm\theta_1, \pm\theta_3, \pm\theta_3$ — это собственные значения матриц вычетов в точках $0, 1, t, \infty$, соответветственно.
(Указание: вопользуйтесь реализацией шестого уравнения Пенлеве как условия изомонодромности семейства скалярных фуксовых уравнений второго порядка.)