Листок 9. Пространства L_1 и L_2.

Анализ, 2 курс, **2.04.2015**

9◇1 К каким из двух пространств $L_1([0,1])$, $L_2([0,1])$ принадлежат следующие функции: **а)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; **б)** $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ -1, & x \notin M \end{cases}$, где M — некоторое неизмеримое подмножество отрезка $[0,1]$.

9◇2 **а)** Докажите неравенство Коши-Буняковского: $|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$. **б)** Докажите, что $L_2(X,\mu) \subset L_1(X,\mu)$, если $\mu(X) < \infty$. **в)** Верно ли аналогичное утверждение, если $X = \mathbb{R}$?

9◇3 Докажите, что **а)** оператор Штурма–Лиувилля

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x),$$

определенный на множестве функций $D_L = \{y(x) \,|\, y(x) \in C^2([0,l]),\ y(0) = y(l) = 0\}$ симметричен, т.е. $\forall y_1, y_2 \in D_L$

$$(Ly_1, y_2)_{L_2} = (y_1, Ly_2)_{L_2},$$

где $(\cdot,\cdot)_{L_2}$ – скалярное произведение в $L_2([0,l])$;
б) если $q(x) \geqslant 0$, $0 < x < l$, то все собственные значения L строго положительны;
в) все собственные значения оператора L однократны.

9◇4 Покажите, что если линейный оператор L симметричен, то его собственные функции y_1 и y_2 ($Ly_1 = \lambda y_1$, $Ly_2 = \mu y_2$), отвечающие различным собственным значениям $\lambda \neq \mu$ ортогональны, т.е. $(y_1, y_2)_{L_2} = 0$.
(*На самом деле, собственные функции оператора Штурма–Лиувилля образуют полную ортогональную систему в* $L_2([0,l])$.)

9◇5 Найдите собственные значения и собственные функции следующих операторов Штурма-Лиувилля: **а)** $L = -\frac{d^2}{dx^2}$, заданного на пространстве функций $y \in L_2([0,\pi])$, $y(0) = y(\pi) = 0$; **б)** $L = -\frac{d^2}{dx^2}$, заданного на пространстве функций $y \in L_2([0,\pi])$, $y'(0) = y'(\pi) = 0$,

9◇6 **а)** Разложите функцию $f(x) = x^2$ в ряд Фурье по косинусам.
б) Воспользуйтесь полученным разложением и найдите суммы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

9◇7 Зная коэффициенты Фурье a_0, a_n, b_n, $(n = 1, 2, \ldots)$ интегрируемой функции $f(x)$, имеющей период 2π, вычислите коэффициенты Фурье $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_n$, $\tilde{b}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ «смещенной» функции $f(x+h)$, $h = \mathrm{const}$.

9◇8 Пусть функции $f, g \in L_2([-\pi,\pi])$. Докажите, что $fg \in L_1([-\pi.\pi])$ и ряд Фурье произведения fg функций f и g может быть получен формальным перемножением рядов Фурье этих функций.

9◇9 Пусть $f \in C([0,\pi])$ и $f' \in L_2([0,\pi])$ и $f(0) = f(\pi) = 0$. Докажите, что тогда

$$\int_0^{\pi} (f(x))^2 dx \leqslant \int_0^{\pi} (f'(x))^2 dx.$$

9◇10 Пусть $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ и $xf(x) \in L_2(\mathbb{R})$. Докажите, что $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$.

9◇11* Пусть $M \subset BV([0,1])$. Докажите, что если все функции из M имеют ограниченную в совокупности вариацию, то M содержит подпоследовательность $\{g_n(x)\}$, сходящуюся в каждой точке отрезка $[0,1]$.