Дифуравнения 2015, 4 модуль

Записки к лекции 1

$$y^{(p)} = f(z, y, y', \dots y^{(p-1)}), \quad z \in \mathbb{C}$$

Задача Коши: нач. усл. $z_0, y_0, y_0', \dots y_0^{(p-1)}$

Интересует существование и единственность

Сжимающие отображения и последовательные приближения работают коши и в вещественном случае, но с комплексной наукой результат получается проще.

Теорема: $\frac{dy}{dz} = f(z, y)$, $f \in \mathcal{O}(D_0^a \times D_0^b) \cap C(D_0^a \times D_0^b)$

$\Rightarrow \exists!$ аналитическое внутри D_0^R, $R > 0$ решение $y(z)$ т.ч. $y(0) = 0$

Идея:
1. Ищем решение в виде ряда по z
2. Раскладываем f в ряд по z, y
3. Мажорируем ряд для f
4. Мажорантный ряд сходится к g
5. Решаем явно $y' = g(z, y)$
6. Ряд для решения $y' = g(z, y)$ мажорирует ряд для решения $y' = f(z, y)$ следовательно исходный ряд сходится там, где сходится ряд для решения $y' = g(z, y)$

*/ищем только голоморфные решения, (в виде ряда) можно показать, что других не существует

3) Вычисления: ① $y' = f(z,y)$

$$y'' = f'_z + f'_y \cdot y'$$

$$y''' = f''_{zz} + f''_{zy} y' + f''_{yy} (y')^2 + f'_y \cdot y''$$

. . . . . .

Ищем голоморфное решение

$$y(z) = A + Bz + Cz^2 + \dots$$

$$\Rightarrow y(z) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} z + \frac{y''(0)}{2!} z^2 + \dots$$

коэффициенты определены однозначно (рекуррентно) после выбора z_0, y_0. Голоморфная функция однозначно определяется рядом $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ получили единственность.

②
$$f(z,y) = \sum F_{pq} z^p y^q = \sum \frac{\partial^{p+q} f}{\partial z^p \partial y^q} \frac{z^p}{p!} \frac{y^q}{q!}$$

*/ Оценки на производные:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \Rightarrow |f| \le \max_\gamma |f|$$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \Rightarrow |f'| \le \max_\gamma |f| / R$$

$$f''(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2 \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi \Rightarrow |f''| \le \max_\gamma |f| \cdot 2 / R^2$$

$$\Rightarrow |f^{(k)}(z)| \le \max_\gamma |f| \cdot k! \cdot R^{-k}$$

Многомерная аналогично:

$$\left| f^{(p,q)}_{(z,y)} \right| \le \max_\gamma |f| \cdot \frac{p!}{a^p} \cdot \frac{q!}{b^q}$$

③ Пусть $M = \max_{D_0^a \times D_0^b} |f| \Rightarrow \left| F_{pq} \right| z \left| \frac{\partial^{p+q} f}{\partial z^p \partial y^q} \frac{1}{p!} \frac{1}{q!} \right| \le \frac{M}{a^p b^q}$

④ $$\sum \frac{M}{a^p b^q} z^p y^q = \frac{M}{(1 - z/a)(1 - y/b)} = g(z,y)$$

⑤ $\tilde{y}' = g(z,\tilde{y}) = \dfrac{M}{(1-z/a)(1-\tilde{y}/b)}$

$$\left(1-\tilde{y}/b\right)d\tilde{y} = \frac{M}{1-z/a}\,dz$$

$$d\left(\tilde{y}-\tilde{y}^2/2b\right) = d\left(M\ln(1-z/a)\right)\cdot -a$$

$$\tilde{y}^2/2b - \tilde{y} - aM\ln(1-z/a) + C = 0$$

$$\tilde{y} = b \pm b\sqrt{1+\frac{2}{b}\left(aM\ln(1-z/a)+C\right)} \qquad \tilde{y}(0)=0 \Rightarrow C=0$$

$$\tilde{y} = b - b\sqrt{1+\frac{2aM}{b}\ln(1-z/a)}$$

⑥ $\tilde{y}$ - голоморфная в нуле, разл. в ряд коэффициентов ряда:

$\tilde{y}(0) = 0$

$\tilde{y}'(0) = g(0,0)$

$\tilde{y}''(0) = g'_z + g'_{\tilde{y}}\cdot\tilde{y}'$

$\tilde{y}'''(0) = g''_z + g''_{z\tilde{y}}\tilde{y}' + g''_{\tilde{y}\tilde{y}}(\tilde{y}')^2 + g'_y\cdot y''$

Все производные g положительны и

$$g^{(p,q)}_{z,y} \geq |f^{(p,q)}_{(z,y)}| \Rightarrow \tilde{y}^{(k)}(0) \geq |y^k(0)| \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд для $y(z)$ сходится.

*/ радиус оценивается снизу расстоянием до ближайшей особенности $\tilde{y}(z)$

$$\ln(1-z/a) = -\frac{b}{2aM} \Rightarrow 1-z/a = e^{-b/2aM}$$

$$\Rightarrow z = a\left(1-e^{-b/2aM}\right), \quad R = |z|$$

4) Аналитическое продолжение решения — решение

Простой случай для понимания:

$y' = f(z, y)$

Кривая γ начинается в z_0

Решили с нач. усл. (z_0, y_0) получили разложение в круге радиуса R. Пусть на границе одна особая точка z^*. Перепрыгиваемся в z_1 с нач. данными (z_1, y_1). Это то же самое решение по т. единственности. По теореме существование радиус сходимости нового ряда не меньше расстояния до границы начального круга (в хорошем случае (идеальном) он равен расстоянию до z^*)

Таким образом, γ покрыта цепочкой кругов в каждом круге есть решение и на пересечении они совпадают. В комплексном анализе это называется Полная Аналитическая Функция (по Вейерштрассу). То есть это "всё" что можно получить аналитическим продолжением из одного кружочка".

*/ Бывает, что граница круга сходимости цепочки состоит из особых точек (особая линия) тогда наружу продолжиться нельзя. ПАФ определена только в круге.

**/ У линейных уравнений такой проблемы не бывает, все решения продолжаются до границы комплекса, особые точки совпадают с особенностями коэффициентов

*Для тех кто знает такие слова:

Итак, локально дифф. уравнение определяет ростки (с соотв. нач. данными) по т. существования и единственности. Набор таких ростков составляет пучок. Соответственно решения – сечения пучка.

Итого:

- Решение ОДУ в точке (круге) это росток голоморфной функции
- Под глобальным решением подразумеваем полную аналитическую функцию (по Вейерштрассу) построенную по кругу – ~~[illegible]~~ начальному решению (разложению)