Дифсистемы 2015, 4 модуль
Записки к лекции 2

Особые точки ОДУ $\quad y^{(p)} = f(z, y, y', \dots, y^{(p-1)})$

Опр: Особые точки уравнения это особые точки коэффициентов и особые точки решений

Особые точки

не зависят от конкретного интегрирования — Неподвижные

зависят от конкретного интегрирования — Подвижные

Неподвижные: Регулярные (1), Иррегулярные (5)

Подвижные: Полюса (3), Критические (4), (6)

(1) $y'' - \frac{1}{z}y' + \frac{1}{z^2}y = 0$

$y = c_1 z + c_2 z \ln z$

(2) $y' - y/z = 0$

$y = cz$

(3) $y' = -y^2$

$y = \frac{1}{z+c}$

(4) $y' = 1/y$

$y = \sqrt{2z + c}$

(5) $y' = y/z^2$

$y = c e^{-1/z}$

(6) $yy'' + (y')^2\left(\frac{2y}{y'} - 1\right) = 0$

$y = c_1 e^{\frac{1}{z - c_2}}$

Опр: Особая точка $z=0$ регулярна если $\exists n \in \mathbb{Z}$ т.ч. $\forall$ решения $y(z)$ и сектора S с вершиной в нуле раствора $< 2\pi$ выполняется $|y(z)|/|z|^n \to 0$ при $|z| \to 0$, $z \in S$

Можно ли что-то сказать о регулярности по виду коэффициентов уравнения?

2) Разберём линейные уравнения

$$(*)\quad y^{(p)} + S_1(z)\, y^{(p-1)} + \dots + S_p(z)\, y = 0$$

$S_i(z)$ – голоморфны вне конечного числа особых точек

*/ Очевидно линейное уравнение не может иметь подвижных особых точек $y(z) = \sum c_k y_k$

**/ Решения линейного уравнения могут иметь особенности только в особых точках коэффициентов. (Следует из продолжения до границы компакта, подробнее увидим далее)

<u>Пример</u> Уравнение Эйлера

$$y^{(p)} + \frac{q_1}{z} y^{(p-1)} + \dots + \frac{q_p}{z^p} y = 0, \quad q_i = const$$

решения ищутся в виде $y = z^\lambda$

характеристическое уравнение

$$\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-(p-1)) z^{\lambda-p} + \dots + q_p z^{\lambda-p} = 0$$

корни:	$\lambda_1, \dots$	$, \lambda_k$
кратности:	$m_1, \dots$	$, m_k$
решения:	z^{λ_1}	z^{λ_k}
	$\vdots$	$\vdots$
	$z^{\lambda_1} \ln^{m_1-1} z$	$z^{\lambda_k} \ln^{m_k-1} z$

Пусть теперь $q_i \to q_i(z)$ – голоморфны

<u>Определение</u>: (*) фуксово в нуле если $S_k(z) = \frac{q_k(z)}{z^k}$ где $q_k(z)$ голоморфно в окр-ти нуля.

$$\boxed{\text{<u>Теорема</u>: (*) регулярно в нуле} \Leftrightarrow \text{(*) фуксово в нуле}}$$

<u>Определение</u>: $(+)\ \frac{d\vec{y}}{dz} = B(z)\vec{y}$ фуксово в нуле если $B(z) = \frac{B_0(z)}{z}$

$$\boxed{\text{Теорема: (+) фуксово} \Rightarrow \text{(+) регулярна}}$$

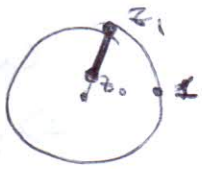
3) <u>Д-во для систем:</u> Смотрим в окрестности нуля, берём единичный круг $D=\{|z|\le 1\}$

$$\frac{dy}{dz}=B(z)\,y,\quad B(z)=\frac{B_0(z)}{z},\quad B_0(z)\in\mathcal{O}(D)$$

Определяем нормы: $\|y\|=\sqrt{|y_1|^2+\dots+|y_p|^2}$

$$\|B_0(z)\|=\max_{\|\xi\|=1}\|B_0(z)\xi\|$$

В одномерном: $\quad K=\max_{z\in D}\|B_0(z)\|$



$$\frac{dy}{dz}=\frac{b_0(z)}{z}y\Rightarrow\frac{dy}{y}=b_0(z)\frac{dz}{z},\quad\left|\frac{dy}{y}\right|\le\left|k\frac{dz}{z}\right|$$

$$\left|\int_\gamma\frac{dy}{y}\right|\le\int_\gamma\left|\frac{dy}{y}\right|\le\int_\gamma\left|k\frac{dz}{z}\right|=-k\ln|z_0|\quad\text{контур}\circlearrowleft$$

$$\|$$

$$|\ln y(z_1)-\ln y(z_0)|=$$

$$\|$$

$$\big|\ln|y(z_1)|-\ln|y(z_0)|\big|\le k\ln|z_0|\Rightarrow\ln|y(z_0)|\le\ln|y(z_1)|+k\ln|z_0|$$

$$\Rightarrow|y(z_0)|\le|y(z_1)|\cdot|z_0|^{-k}\le Q\cdot|z_0|^{-k},\quad Q=\max_{\partial D}|y(z)|$$

В многомерном аналогично

$$\cancel{|d\|y\||\le\|dy(z)\|}\qquad\left|\frac{\|dy\|}{\|y\|}\right|\le k\frac{|dz|}{|z|}$$

$$\left|\int_\gamma\frac{d\|y\|}{\|y\|}\right|\le\int_\gamma\left|\frac{d\|y\|}{\|y\|}\right|\le\int_\gamma k\frac{dz}{z}=-k\ln|z_0|$$

$$\|$$

$$\big|\ln\|y(z_1)\|-\ln\|y(z_0)\|\big|\Rightarrow\|y(z_0)\|\le\|y(z_1)\|\,|z_0|^{-k}\le Q\,|z_0|^{-k}$$

ВСЁ

<u>Пример:</u> $\dfrac{dy}{dz}=\begin{pmatrix}0&1\\1/z^2&-1/z\end{pmatrix}y$ решение $y=c_1\begin{pmatrix}z\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1/z\\-1/z^2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Бывают регулярные неразрешенные системы

Док-во для уравнений:

$\boxed{\text{Достаточность}}$: Переходим к системе с логарифмическим временем:

Обычно

$u^1 = y$

$u^2 = y'$

$\vdots$

$u^p = y^{(p-1)}$

Лог. время

$u^1 = y$

$u^2 = zy'$

$\vdots$

$u^p = z^{p-1} y^{(p-1)}$.

получаем: $(*) \rightsquigarrow \dfrac{du}{dz} = \dfrac{1}{z}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ & 1 & 1 & 0 & & \\ & & 2 & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ -q_p & -q_{p-1} & \cdots & & & -q_1+p-1 \end{pmatrix}$

Система в нуле фуксова $\Rightarrow$ регулярна

$\Rightarrow$ ~~решения~~ и имеет степенной рост в нуле

$\Rightarrow$ y имеет степенной рост в нуле

$\boxed{\text{Необходимость}}$: Замечание – $(*)$ если регулярно, то всегда имеет решение вида $y(z) = V(z)\cdot z^{\lambda}$, $\lambda = \text{const}$, $V(z)$ – голом.

Д-во – пусть $y_1, \dots, y_p$ – какой-нибудь базис

$(y_1, \dots, y_p) \xrightarrow[\text{нуля}]{\text{вокруг}} (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_p) = (y_1, \dots, y_p)\cdot G$

$E = \frac{1}{2\pi i}\ln G \Rightarrow z^E \rightsquigarrow z^E \cdot G \Rightarrow (y_1, \dots, y_p) z^{-E} \rightsquigarrow (y_1, \dots, y_p) z^{-E}$

$\Rightarrow (y_1, \dots, y_p) z^{-E}$ – мероморфна в нуле $\Rightarrow$

$\Rightarrow (y_1, \dots, y_p) z^{-E} = (V_1(z)\cdot z^{k_1}, \dots, V_p(z) z^{k_p})$ где $V_k(z)$ – голом.

$\Rightarrow$ в базисе, где монодромия верхнетреугольна

$y_1(z) = (V_1(z) z^{k_1}, \dots) z^E = (V_1(z) z^{k_1+\lambda_1}, \dots)$ конец замечания

Пусть $\hat{y}(z) = V(z) z^{\lambda}$ – решение $(*)$

Подставляем $\tilde{y} = \hat{y}\cdot x$ в $(*)$

$(\hat{y}\cdot x^{(p)} + p\hat{y}^{(p-1)} x' + \dots) + S_1(z)(\hat{y}^{(p-1)} x + \dots) + \dots + S_p(z)(\hat{y}\cdot x) = 0$

Собираем по порядкам x:

$\hat{y}\, x^{(p)} + (p\hat{y}' + \hat{y} S_1(z)) x^{(p-1)} + \dots \dots (\hat{y}^{p} + S_1(z)\hat{y}^{(p-1)} + \dots + S_p \hat{y}) x = 0$

$(*)\ x^{(p)} + b_1(z)x^{(p-1)} + \dots + b_p(z)x = 0$

Очевидно $(*)$ фуксово $\Leftrightarrow$ $(*)$ фуксово т.к.
$y = v(z)\cdot z^{\lambda} \Rightarrow y^{(k)}/y \sim z^{-k}$ и значит

$b_1(z)$ и $s_1(z)$ одновременно имеют или не имеют полюс выше первого порядка
Далее, $b_p(z) \equiv 0 \Rightarrow$ можно понизить порядок уравнения $t^{(p-1)} + b_1 t^{(p-2)} + \dots + b_{p-1} t = 0$
Получим мат индукции, остаётся проверить базу. $y' + p(z)y = 0$, $y = v(z)z^{\lambda}$

$$p(z) = -y'/y = -\left(v'/v + \lambda/z\right)$$

полюс первого порядка