Теория функций комплексного переменного – 2015
Листок 4

срок сдачи 17.04.2015

1. Пусть D – произвольная область, $\gamma \subset D$ – спрямляемая кривая, f – функция, голоморфная в $D \setminus \gamma$ и непрерывная в D. Докажите, что f голоморфна в D.

2. Постройте мероморфную функцию в $\mathbb{C}$, которая не принимает ровно два значения $a, b \in \mathbb{C}$.

3. Существует ли конформная биекция $f : U \to U$ (U – единичный круг), такая, что $f(0) = \frac{1}{2}$ и $f(\frac{1}{2}) = \frac{7}{8}$?

4. Фиксируем $\tau \in \mathbb{C}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ такие, что $\operatorname{Im}\tau > 0$, $0 \le \alpha, \beta < 1$. Для любого натурального $n \ge 1$ рассмотрим линейное пространство $\Theta^{(n)}_{\alpha,\beta}$ целых функций, удовлетворяющих условиям

$$f(z+1) = e^{2\pi i\alpha} f(z)\,, \qquad f(z+\tau) = e^{-\pi i n\tau - 2\pi i n z - 2\pi i\beta} f(z).$$

Они называются тета-функциями порядка n с характеристиками α, β.

а) Докажите, что $\dim \Theta^{(n)}_{\alpha,\beta} = n$.

б) Рассмотрим подпространство $\Theta^{(n)+}_{0,0} \subset \Theta^{(n)}_{0,0}$ четных тета-функций с нулевыми характеристиками; докажите, что $\dim \Theta^{(n)+}_{0,0} = \dfrac{1}{2}(n+2)$ для четных n и $\dfrac{1}{2}(n+1)$ для нечетных.

5. Фиксируем $\tau \in \mathbb{C}$ такое, что $\operatorname{Im}\tau > 0$, и определим функцию $\theta_1(z|\tau)$ рядом

$$\theta_1(z|\tau) = -\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{\pi i\tau(k+\frac{1}{2})^2 + 2\pi i(k+\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})}$$

(для краткости будем писать $\theta_1(z|\tau) = \theta_1(z)$).

а) Докажите, что $\theta_1(z) \in \Theta^{(1)}_{1/2,1/2}$, т.е.

$$\theta_1(z+1|\tau) = -\theta_1(z|\tau), \qquad \theta_1(z+\tau|\tau) = -e^{-\pi i\tau - 2\pi i z}\theta_1(z|\tau).$$

б) Докажите, что нули функции $\theta_1(z)$ простые и расположены в точках $N + M\tau$, $N, M \in \mathbb{Z}$.

в) При каких соотношениях на параметры $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ функция

$$f(z) = \frac{\theta_1(z-a_1)\,\theta_1(z-a_2)\ldots\theta_1(z-a_m)}{\theta_1(z-b_1)\,\theta_1(z-b_2)\ldots\theta_1(z-b_n)}$$

будет двоякопериодической в комплексной плоскости?

г) Докажите тождество

$$\theta_1(v+y)\theta_1(v-y)\theta_1(z+u)\theta_1(z-u) - \theta_1(u+y)\theta_1(u-y)\theta_1(z+v)\theta_1(z-v)$$

$$+\ \theta_1(u+v)\theta_1(u-v)\theta_1(z+y)\theta_1(z-y) \ =\ 0$$

(*Указание:* воспользуйтесь тем, что $\theta_1(z+a)\theta_1(z-a) \in \Theta^{(2)}_{0,0}$.)

д) Докажите, что функция $\theta_1(z)$ разлагается в бесконечное произведение

$$\theta_1(z) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin(\pi z) \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})(1-q^{2n}e^{2\pi i z})(1-q^{2n}e^{-2\pi i z}) \,,$$

где $q = e^{\pi i \tau}$.