

**Дискретная математика**  
**Семинар 13**  
ВШЭ, факультет математики  
первый курс, четвёртый модуль

1. Опишите помеченные деревья, код Прюфера которых является степенью одной переменной. Опишите помеченные деревья, в код Прюфера которых каждая из переменных входит не более одного раза.

Пусть  $\Gamma$  – граф с множеством вершин  $V$ . Назовём отображение  $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  правильной раскраской, если значения  $f$  на любых двух смежных вершинах различны. Обозначим через  $\chi_\Gamma(k)$  количество правильных раскрасок.

2. Вычислите значения  $\chi_\Gamma(k)$ , если  $\Gamma$  это дерево с  $n$  вершинами.

3. Вычислите значения  $\chi_\Gamma(k)$ , если  $\Gamma$  это полный граф с  $n$  вершинами.

4. Вычислите значения  $\chi_\Gamma(k)$ , если  $\Gamma$  это цикл с  $n$  вершинами.

Пусть  $e$  – ребро графа  $\Gamma$ . Обозначим через  $\Gamma - e$  новый граф, полученный стиранием ребра  $e$ , а через  $\Gamma/e$  граф, полученный стягиванием ребра  $e$ .

5. Докажите, что  $\chi_{\Gamma-e}(k) = \chi_\Gamma(k) + \chi_{\Gamma/e}(k)$ .

6. Докажите, что  $\chi_\Gamma(k)$  есть многочлен с целыми коэффициентами от  $k$  (он называется хроматическим многочленом графа).

7. Найдите степень хроматического многочлена. Вычислите два старших коэффициента  $\chi_\Gamma(k)$  и свободный член.

8. Пусть  $T_n = n^{n-1}$ . Докажите прямой подстановкой, что эпф чисел  $T_n$  является обратным рядом к  $xe^{-x}$ .