Задачи к курсу Тропическая геометрия, весна 2015

Обсуждение задач (для желающих) происходит еженедельно после спецкурса. Список будет пополняться каждую неделю.

1. Носитель произведения многочленов fg не обязательно равен сумме Минковского носителей f и g (приведите пример), но многогранник Ньютона произведения fg всегда равен сумме Минковского многогранников Ньютона f и g.

2. Рассмотрим два многочлена общего положения бистепени $(2, 2)$ от двух переменных x, y. Покажите с помощью формулы Кушниренко—Бернштейна, что у этих многочленов 8 общих корней. Объясните, почему к этим двум многочленам степени 4 неправомерно применять теорему Безу, которая предсказывает наличие $4 \cdot 4 = 16$ корней для двух многочленов степени 4.

3. Докажите, что ковекторы, для которых является опорной данная k-мерная грань n-мерого многогранника, образуют $(n-k)$-мерный конус.

4. Докажите, что опорное значение и опорная грань суммы Минковского многогранников A и B для данного ковектора равны сумме опорных значений и опорных граней многогранников A и B для этого ковектора: $(A+B)^\gamma = A^\gamma + B^\gamma$ и $(A+B)(\gamma) = A(\gamma) + B(\gamma)$.

5. Докажите, что площадь целочисленного многоугольника A равна сумме произведений $A(\gamma) \cdot$ (целочисленная длина A^γ) по всем примитивным ковекторам γ.

6! Докажите существование и единственность смешанной площади, т.е. симметричной функции двух выпуклых многоугольников, билинейной относительно сложения многоугольников по Минковскому и сопоставляющей паре (A, A) площадь A. Подсказка: придумайте обобщения формулы для площади из прошлой задачи для смешанной площади.

7. Найдите смешанный объем двух тропеций с вершинами $(0, 0)$, $(a_i, 0)$, $(0, 1)$, $(b_i, 1)$, $i = 1, 2$. Объясните, почему он оказался равен числу нулей определителя матрицы 2 на 2, составленной из общих многочленов одной переменной t степеней a_1, a_2, b_1, b_2 соответственно.

8! Опишите все возможные комбинаторные типы персечения двух тропических плоскостей в пространстве T^3.

9. Опишите все комбинаторные типы тропических квадрик на плоскости.

10. Докажите, что через пять точек общего положения на плоскости проходит ровно одна тропическая квадрика. Приведите пример пяти различнх точек, для которых это не так.

11. Придумайте неприводимую тропическую кубику, которая является деревом, и кубику, которая не является деревом.

12. Задайте явным неравенством амебу комплексной кривой $x + y + 1 = 0$ или задайте явной параметризацией ее границу.

13! Придумайте комплексную кубику со стягиваемой амебой и кубику с нестягиваемой амебой.

14. Для $t \in \mathbb{N}$ определим t-сумму комплексных чисел $r_1 e^{\pi i \varphi_1}$ и $r_2 e^{\pi i \varphi_2}$ как число $r e^{\pi i \varphi}$, такое что $r^t e^{\pi i \varphi} = r_1^t e^{\pi i \varphi_1} + r_2^t e^{\pi i \varphi_2}$ (например, при $t = 1$ получаем обычную сумму). Найдите предел $\lim_{t \to +\infty} z +_t w$. Подсказка: рассмотрите отдельно случаи, когда $r_1 \neq r_2$, $z = -w$ и оставшийся.

15. Какие бывают предельные точки у последовательности $\lim_{t \to +\infty} z_t +_t w_t$, если последовательности z_t и w_t стремятся к z и w соответственно?

16! Опишите явно (как множество точек) комплексную тропическую кривую, задаваемую уравнением $x+y+1 = 0$, и ее отображение амебы на соответствующую “обычную” тропическую кривую. Укажите ее топологический тип.

17! Пусть Δ – целочисленный треугольник без целых точек на сторонах. Сколько самопересечений у нодальной рациональной кривой с многоугольником Ньютона Δ, и какой вид имеет параметризация такой кривой? Посчитайте, не обращаясь к теореме Михалкина, сколько таких кривых проходит через две точки общего положения.

18! Посчитайте, сколько рациональных кубик проходит через 8 точек общего положения, с помощью теоремы Михалкина.

19. Посчитайте, сколько рациональных кубик проходит через 8 точек общего положения, вычислив степень A-дискриминанта кубического многочлена двух переменных.

20! Найдите все целочисленные многоугольники A, для которых A-дискриминант тривиален.