

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО – 2015
ЛИСТОК 5

срок сдачи 15.05.2015

1. Докажите, что прямоугольник нельзя конформно перевести в квадрат так, чтобы все вершины перешли в вершины.
2. Пусть f – функция, конформно отображающая верхнюю полуплоскость переменной z на внутренность n -угольника с внутренними углами в вершинах $\pi\alpha_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$, $0 < \alpha_k \leq 2$).

а) Докажите, что функция $g(z) = f''(z)/f'(z)$ аналитически продолжается до регулярной функции на $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, где $a_k \in \mathbb{R}$ – прообразы вершин многоугольника.

б) Докажите, что $g(z) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k}$.

в) Как изменятся предыдущие утверждения, если f – функция, конформно отображающая внутренность единичного круга на внутренность того же многоугольника?

3. Пусть f – функция, конформно отображающая верхнюю полуплоскость переменной z на внутренность кругового n -угольника (т.е. n -угольника, стороны которого – дуги окружностей) с внутренними углами в вершинах $\pi\alpha_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$, $0 < \alpha_k \leq 2$).

а) Докажите, что функция

$$g(z) = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 = \sqrt{f'(z)} \left(\frac{1}{\sqrt{f'(z)}} \right)'' \quad (\text{шварциан } S(f; z))$$

аналитически продолжается до регулярной функции на $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, где $a_k \in \mathbb{R}$ – прообразы вершин многоугольника.

б) * Докажите, что $g(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1 - \alpha_k^2}{(z - a_k)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{z - a_k}$, где c_k – некоторые коэффициенты (они называются аксессуарными параметрами).

4. Гамма-функция $\Gamma(z)$ определяется при $\operatorname{Re} z > 0$ формулой $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$.

а) Докажите основное свойство гамма-функции $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ при $\operatorname{Re} z > 0$ и вычислите $\Gamma(n)$ при $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

б) Докажите, что функция $\Gamma(z)$ может быть аналитически продолжена до голоморфной функции на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$, имеющей в каждой точке $z = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) простой полюс с вычетом $(-1)^n/n!$.

- в) Докажите, что функцию $1/\Gamma(z)$ можно представить в виде бесконечного произведения

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} \right],$$

где $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right) = 0,5772\dots$ – постоянная Эйлера.

- г) Докажите тождество

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Найдите $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ при произвольном $n \in \mathbb{Z}$.

5. Дзета-функция Римана комплексной переменной s при $\operatorname{Re} s > 1$ определяется

$$\text{рядом } \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

- а) Докажите, что при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx.$$

- б) Докажите, что функция $\zeta(s)$ может быть аналитически продолжена до голоморфной функции на $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, имеющей в точке $s = 1$ простой полюс с вычетом 1.
- в) Докажите, что дзета-функция Римана удовлетворяет функциональному соотношению

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

- г) Найдите $\zeta(-2k)$ при $k \in \mathbb{Z}_+$, а также $\zeta(-1)$, $\zeta(0)$, $\zeta(2)$.
- д) Докажите, что при $\operatorname{Re} s > 1$ функцию $\zeta(s)$ можно представить в виде бесконечного произведения

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

по всем простым числам $p = 2, 3, 5, 7, 11, \dots$