Дифсистемы 2015, 4 модуль
Заметки к лекции 3

Что было: (первые две лекции):

① Теорема о существовании и единственности для $y' = f(z, y)$, $f \in \mathcal{O}(D_0^a \times D_0^b) \cap C(D_0^a \times D_0^b)$

<u>Следствие</u> Та же теорема для системы $\vec{y}' = B(z, \vec{y})$

<u>Следствие</u> Та же теорема для уравнения
$$y^{(k)} = f(z, y, y', \dots, y^{(k-1)})$$

② Аналитическое продолжение решения будет решением (уравнение с мероморфными коэффициентами)

а) В точке (голоморфности) дифф. уравнение задаёт росток решения.

б) Из ТФКП знаем, всякий голоморфный росток определяет полную аналитическую функцию (по Вейерштрассу)

в) Из (теоремы?) об аналитическом продолжении следует, что в любой точке любой росток этой аналитической функции будет ростком решения исходного дифф. уравнения

г) Итак, полученное решение это росток, глобально аналитическая функция

д) не будет однозначной на $\mathbb{C}P^1$, даже с проколами, но она нигде и не нужна

2) е) Это специфика комплексных дифф. уравнений, в вещественных всё хуже

3) О особые точки ДУ

*/ Бывают подвижные, неподвижные, регулярные, иррегулярные, полюсы, критические, фуксовы и нефуксовы

*/ Линейное уравнение (система) не может иметь подвижных особенностей

*/ Линейное уравнение (система) может иметь особенности только в особых точках коэффициентов.

*/ Система фуксова ⇒ система регулярна

*/ Бывают нефуксовы регулярные системы

*/ Скалярное уравнение регулярно тогда и только тогда, когда оно фуксово

*/ Всякое (регулярное) линейное уравнение или система имеют решение вида $y(z) = V(z) \cdot z^{\lambda}$, где $V(z)$ голоморфная функция (столбец), $\lambda \in \mathbb{C}$

Асимптотики нормирования

Определение: Нормирование (левоевское) (в нуле)

$$\varphi(y) = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \{k \mid \forall(\lambda<k)\ |y(z)|/|z|^{\lambda} \to 0 \text{ при } z\to 0,\ z\in S\}$$

сектор

$$\varphi(0) \overset{def}{=} +\infty$$

Нормирование вектора (матрицы) минимум из нормирований компонент

По смыслу — целая часть скорости роста

Пример:

$$\varphi\begin{pmatrix} 1+z^2\ln z \\ 1/z + \ln z\end{pmatrix} = -1$$

$$f = c_{-k}/z^k + \dots + c_0 + \dots$$

$$\varphi(f) = -k$$

$$\varphi(f\cdot \ln^m z) = -k$$

$$\varphi(f\cdot z^{\rho}\ln^m(z)) = -k, \quad \operatorname{Re}\rho\in[0,1)$$

Утв: E — нормализованный логарифм $\Rightarrow \varphi(z^E) = 0$

Д-во: (идея) Напомним нормализацию:

E — нормальный логарифм $G \Rightarrow E = \frac{1}{2\pi i}\ln G$ и собств. значения выбраны т. что $\operatorname{Re}\in[0,1)$

$$z^{\frac{1}{2\pi i}\ln\begin{pmatrix}\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}} = z^{\frac{1}{2\pi i}\ln\left[\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]\right]} = z^{\frac{1}{2\pi i}\ln\lambda}\, z^{\frac{1}{2\pi i}\ln\left(1+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)} =$$

$$= z^{\frac{1}{2\pi i}\ln\lambda}\cdot z^{\frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}} = z^{\frac{1}{2\pi i}\ln\lambda}\cdot e^{\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2\pi i}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\ln z} =$$

$$= z^{\frac{1}{2\pi i}\ln\lambda}\cdot\begin{pmatrix}1 & \ln z/2\pi i\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z^{\rho} & z^{\rho}\ln z/2\pi i\\ 0 & z^{\rho}\end{pmatrix}, \quad \operatorname{Re}\rho\in[0,1)$$

Приведение к ЖНФ: $E = S^{-1}\tilde{E}S$ не может нарушить нормирование

4) <u>Следствие</u> На пр-ве решений уравнения (системы) определено нормирование $\varphi: X \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ со свойствами:

а) $\varphi(u \cdot const) = \varphi(u)$

б) $\varphi(u+v) \geq \min(\varphi(u), \varphi(v))$

в) $\varphi(g^*(u)) = \varphi(u)$

$\uparrow$ отобр. монодромии

<u>Д-во:</u> а), б) очевидны.

в) Y - фунд. матрица $\rightsquigarrow \tilde{Y} = YC$

C Жордановой Н.Ф. монодромии

$\tilde{Y} = M(z) \cdot z^E$, где $M(z)$ мероморфна

$\Rightarrow$ компоненты $\tilde{Y}$ имеют вид

$\sum f_{ke}(z) z^{\rho_k} \ln_z^{be} \Rightarrow$ компоненты Y имеют тот же вид

При монодромии:

$g^*(\ldots) = \sum f_{ke}(z) z^{\rho_k} e^{2\pi i \rho_k} (\ln z + 2\pi i)^{be}$

по свойству а) и б) нормирование не уменьшилось. То же самое верно для $(g^*)^{-1} \Rightarrow$ нормирование не меняется.

<u>Следствие</u>: Нормирование принимает на X лишь конечное число значений

$\varphi^1 > \ldots > \varphi^m$

<u>Д-во</u> следует из а), б) и конечномерности X.

Левоневская фильтрация

$X = X_1 \oplus X_2 + \dots$

корневые подпр-ва монодромии

На X_i, нормирование φ принимает конечное число значений $\varphi_i^1 > \dots > \varphi_i^m$

$\Rightarrow 0 \subset X_i^1 \subset \dots \subset X_i^m = X_i$

$X_i^k = \{ y \in X_i \mid \varphi(y) \geq \varphi_i^k \}$

*/ X_i^k - инвариантные относительно монодромии

Следствие (Левоневский базис)

$z=0$ регулярная особая точка уравнения (системы) $\Rightarrow$ существует базис пр-ва решений (фундаментальная матрица) $Y_e(z)$ следующего вида:

$$Y_e(z) = U(z) \cdot z^{\Lambda} \cdot z^{E}$$

U - голоморфно в окр-ти нуля

E - блочно-диагональна и верхнетреугольна

Λ - диагональна, целочисленна, внутри каждого блока (i) соотв. E выполняется $\lambda_i^j \geq \lambda_i^{j+1}$

и нормирование φ принимает на столбцах Y_e все свои возможные значения (λ_i^j) с кратностями

Д-во: Выбираем базис X_i^1 с верхнетр. монодромией. Дополняем до базиса X_i^2 с верхнетр. монодр. и так далее

6)

<u>Пример:</u> $y' = \begin{pmatrix} 1/z & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y$

$$Y(z) = \begin{pmatrix} z & z\ln z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} z^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$