Дискретная математика
Листок 6

ВШЭ, факультет математики
первый курс, четвёртый модуль

Листок можно сдавать до 19.05.2015.

1. Рассмотрим ряд $B(t) = t - \sum_{i\geq 2} \frac{b_i}{i!} t^i$. Пусть $A(s) = s + \sum_{k\geq 2} \frac{a_k}{k!} s^k$ – обратный ряд ($B(A(s)) = s$). Докажите, что

$$a_k = \sum_{k_2,k_3,\ldots} A_{k;k_2,k_3,\ldots} b_2^{k_2} b_3^{k_3} \ldots .$$

Докажите, что $A_{k;k_2,k_3,\ldots} \neq 0$, только если $\sum_{i>1}(i-1)k_i = k-1$.

2. Докажите, что если $\sum_{i>1}(i-1)k_i = k-1$, то

$$A_{k;k_2,k_3,\ldots} = \frac{(\sum_{i>1} ik_i)!}{\prod_{i>1}(i!)^{k_i}(k_i)!}.$$

3. Коэффициент $A_{k;k_2,k_3,\ldots}$ равен числу корневых деревьев с корнем валентности больше 1 и с k занумерованными вершинами валентности 1, имеющим k_2 вершин с 2 потомками, k_3 вершин с тремя потомками и т.д.

4. Выпишите коды Прюфера всех помеченных деревьев с четырьмя вершинами и убедитесь, что каждая последовательность длины два из букв x_1, x_2, x_3, x_4 встречается среди этих кодов ровно один раз.

5. Вычислите эпф чисел (некорневых) лесов на n помеченных вершинах. Выпишите производящие многочлены для числа помеченных лесов на $2, 3, 4, 5$ вершинах.

6. Зафиксируем $k \geq 1$. Сколько перестановок из S_n не имеют циклов длины k? Пусть $f_k(n)$ обозначает их число. Вычислите $\lim_{n\to\infty} f_k(n)/n!$.

7. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – подмножества конечного множества A. Для каждого подмножества T множества $\{1, \ldots, n\}$ положим $A_T = \bigcap_{i\in T} A_i$ ($A_\emptyset = A$) и для $0 \leq k \leq n$ положим $S_k = \sum_{|T|=k} |A_T|$. Докажите, что $S_k - S_{k+1} + \cdots + (-1)^{n-k} S_n \geq 0$ при всех k. Выразите через числа S_k количество элементов A, не принадлежащих ни одному из множеств A_i.

8. Найдите необходимые и достаточные условия, накладываемые на вектор $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$, чтобы существовали подмножества $A_1, \ldots, A_n$ конечного множества A, удовлетворяющие условиям предыдущей задачи.

9. Пусть

$$0 \overset{d_{n+1}}{\to} V_n \overset{d_n}{\to} V_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\to} \cdots \overset{d_1}{\to} V_0 \overset{d_0}{\to} W \overset{d_{-1}}{\to} 0$$

точная последовательность конечномерных векторных пространств, т.е. d_j – линейные преобразования, удовлетворяющие условиям $\mathrm{im} d_{j+1} = \ker d_j$. Покажите, что $\dim W = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim V_i$.

10. Докажите, что $\mathrm{rk} d_j = \sum_{i=j}^n (-1)^{i-j} \dim V_i$.