

**Листок 5. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ В ДВУХ- И ТРЕХМЕРНОМ
ПРОСТРАНСТВЕ**

УРЧП, 3-4 КУРС, 17.04.2015

Решение задачи Коши $u_{tt} = a^2 \Delta u$, $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $u_t|_{t=0} = \psi(x)$, где Δ – n -мерный оператор Лапласа, выражается формулами:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_{|\xi-x|<at} \frac{\psi(\xi)d\xi}{\sqrt{(at)^2 - |\xi-x|^2}} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2\pi a} \int_{|\xi-x|<at} \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\sqrt{(at)^2 - |\xi-x|^2}} \right] \quad (\text{Ф-ла Пуассона}),$$

при $n = 2$;

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|\xi-x|=at} \psi(\xi)dS_\xi + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|\xi-x|=at} \varphi(\xi)dS_{xi}dS_\xi \right] \quad (\text{Ф-ла Кирхгофа});$$

при $n = 3$.

5◊1 Докажите, что если $f(x)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ – гармонические функции в \mathbb{R}^n , а $g(t) \in C^1(t \geq 0)$, то решение задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + g(t)f(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x)$$

выражается формулой $u(x, t) = u_0(x) + tu_1(x) + f(x) \int_0^t (t - \tau)g(\tau)d\tau$.

5◊2 Найдите решение $u(x, t)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, в $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ задачи:

$$u_{tt} = \Delta u, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \|x\|^7.$$

5◊3 Найдите решение $u(x, t)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, в $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ задачи:

$$u_{tt} = \Delta u, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \frac{1}{1 + (x_1 + x_2 + x_3)^2}.$$

5◊4 Пусть $u(x, y, t)$ – решение при $t \geq 0$ задачи Коши:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = \psi(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^2),$$

где $\psi(x, y) = 0$ при $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]$, $\psi(x, y) > 0$ при остальных (x, y) .

а) Опишите с помощью неравенств множество всех значений $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}_+}$, для которых $u(x, y, t) = 0$.

б) Нарисуйте это множество.

5◊5 Пусть $u(x, t)$ – решение задачи Коши при $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$:

$$u_{tt} = \Delta u, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \psi(x),$$

где $\psi(x) = 0$ при $0.9 \leq \|x\| \leq 1$, $\psi(x) > 0$ для остальных x .

При каких (x, t) функция $u(x, t)$ равна нулю?