Гидродинамика и турбулентность

Содержание

Вводные замечания

Предмет гидродинамики – движение жидкостей (или газов), рассматриваемых как сплошные среды. Далее мы будем часто говорить о частицах жидкости. Это идеализированное понятие требует некоторых пояснений. Имеются в виду ни в коем случае не молекулы, из которых на самом деле состоит любая жидкость. Под частицей жидкости в гидродинамике понимается “физически бесконечно малый” её элемент (маленький кубик или шарик), мысленно выделенный в объеме текущей жидкости.

Такая “частица”, рассматриваемая в гидродинамике как точка, должна тем не менее содержать достаточно много молекул (скажем, 10^{17} штук), чтобы можно было говорить о непрерывной среде. Иными словами, размер мысленно выделяемой частицы жидкости или газа должен быть очень малым по сравнению с характерным размером сосуда или трубы, но очень большим по сравнению со средним расстоянием между молекулами. Если, например, в гидродинамике говорят о смещении или скорости частицы жидкости, под этим понимают смещение или скорость малого объема жидкости как целого (а не отдельной молекулы). Соседние частицы жидкости, соприкасаясь своими поверхностями, могут взаимодействовать друг с другом. Это взаимодействие макроскопически проявляется как силы, действующие в жидкости – такие, как давление или вязкость.

Обозначения и соглашения. Всюду предполагается, что задана некоторая (“неподвижная” или “лабораторная”) декартова система координат $x = x_1, y = x_2, z = x_3$. Векторы в пространстве обозначаются жирными латинскими буквами, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_i v_i$ (суммирование по повторяющимся индексам) – скалярное произведение векторов $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ и $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ – их векторное произведение. Векторное произведение в 3-мерном пространстве дуально внешней 2-форме $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$. Компоненты векторного произведения равны $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i = \epsilon_{ijk} u_j v_k$, где ϵ_{ijk} – полностью антисимметричный (псевдо)тензор 3-го ранга, $\epsilon_{123} = 1$.

Широко используется векторный дифференциальный оператор

$$\nabla = \Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Big);$$

$\nabla\cdot\mathbf{v} = \partial v_i/\partial x_i$ – дивергенция, $\nabla\times\mathbf{v}$ – ротор векторного поля ($(\nabla\times\mathbf{v})_i = \epsilon_{ijk}\dfrac{\partial v_j}{\partial x_k}$), $\Delta = \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

1 Идеальная жидкость

Описание состояния движущейся жидкости осуществляется с помощью (скалярной) функции плотности $\rho(\mathbf{x}, t)$ и векторного поля скоростей частиц жидкости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ с компонентами (v_x, v_y, v_z) или (v_1, v_2, v_3). Плотность частицы жидкости, находящейся в точке $\mathbf{x}$, – это ее масса dm, деленная на ее объем $d\Omega$: $\rho = dm/d\Omega$. Скорость $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ такой частицы, проходящей через точку $\mathbf{x}$ пространства в момент времени t, – это ее скорость, измеренная неподвижным наблюдателем, привязанным к точке $\mathbf{x}$. Поскольку система координат фиксирована, можно говорить о скорости как о совокупности функций $v_i(\mathbf{x}, t)$, $i = 1, 2, 3$.

1.1 Уравнение непрерывности

Между функциями плотности и скорости имеется связь, которая выражает закон сохранения вещества (точнее, массы вещества). Мысленно выделим в жидкости некоторый односвязный объем (область) Ω_0 произвольной формы, неподвижный относительно лабораторной системы. Масса жидкости в этом объеме равна, очевидно, $\int_{\Omega_0} \rho d\Omega$. Закон сохранения вещества означает, что если внутри нет источников, она может изменяться только за счет того, что жидкость втекает или вытекает через поверхность $\partial\Omega_0$, ограничивающую объем Ω_0. Введем вектор $d\mathbf{s}$, равный по абсолютной величине элементу площади поверхности, и направленный по внешней нормали к ней. Тогда масса жидкости, втекающей в объем Ω_0 за малое время δt, есть $-\delta t \oint_{\partial\Omega_0} \rho\mathbf{v}\cdot d\mathbf{s}$ (подынтегральное выражение положительно, если жидкость вытекает через площадку $d\mathbf{s}$, и отрицательно, если втекает). Это выражение надо приравнять изменению массы $\delta t \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_0} \rho d\Omega$:

$$-\oint_{\partial\Omega_0} \rho\mathbf{v}\cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_0} \rho d\Omega$$

Интеграл по поверхности преобразуем в интеграл по объему с помощью теоремы Гаусса:

$$\oint_{\partial\Omega_0} \rho\mathbf{v}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\Omega_0} \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) d\Omega$$

Имеем, следовательно,

$$\int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v})\right) d\Omega = 0$$

Так как это должно иметь место для любого объема, делаем вывод, что нулю равно подынтегральное выражение, т.е.

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0} \tag{1.1}$$

Это и есть уравнение непрерывности, связывающее функции плотности и скорости. В силу важности приведем также другие его формы записи:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{1.3}$$

Отметим, что в случае несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) уравнение (1.1) превращается в условие бездивергентности векторного поля скоростей: $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$.

Более общая форма уравнения непрерывности относится к случаю, когда в жидкости имеются источники или стоки вещества (“насосы”). Тогда в правой части уравнения (1.1) появится пространственная плотность мощности источника $q(\mathbf{x}, t)$. В частности, в присутствии точечного источника в некоторой точке $\mathbf{x}_0$ уравнение непрерывности запишется в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \tag{1.4}$$

где $\delta(\mathbf{x})$ – трехмерная дельта-функция, а q – мощность источника.

1.2 Уравнение Эйлера

Уравнение непрерывности является лишь некоторым кинематическим соотношением общего характера, ничего не говорящим о том, каким динамическим законам подчиняется течение жидкости. Динамика жидкости определяется уравнением Эйлера, которое представляет собой по сути второй закон Ньютона $m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$, переписанный для сплошной среды. Основная идея его вывода – что ускорение частицы жидкости должно быть пропорционально силе, на нее действующей. При этом сила предполагается консервативной, т.е. диссипация энергии отсутствует. Это последнее предположение и означает идеальность жидкости.

Ускорение. Выразим сначала ускорение частицы жидкости в терминах поля скоростей. Отметим сразу, что было бы неверно написать $\partial\mathbf{v}/\partial t$, поскольку ускорение данной частицы, проходящей в момент времени t через точку $\mathbf{x}$, – это

$$\lim_{\delta t\to 0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}, t+\delta t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\delta t},$$

где $\delta\mathbf{x}$ – смещение частицы за время δt. (Если бы мы написали просто $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t+\delta t)$, это была бы скорость *другой* частицы, а именно, той, которая проходила бы в момент $t+\delta t$ через точку $\mathbf{x}$.) При этом смещение $\delta\mathbf{x}$ равно, очевидно, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\delta t$, так что

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}+\mathbf{v}\delta t,\ t+\delta t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\,\delta t + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_i}\,v_i\delta t = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\,\delta t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\delta t$$

Изменение скорости складывается из ее изменения в данной точке и разницы между скоростями в точках, между которыми частица переместилась за время δt. Итак, ускорение равно:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$$

Мы видим, что надо различать частную производную по времени (относящуюся к данной точке пространства) и полную (относящуюся к данной частице). Смысл второго слагаемого в полной производной можно наглядно понять в случае стационарного течения (для которого частная производная равна нулю). Очевидно, второе слагаемое не равно нулю, если скорость меняется вдоль линии тока, т.е. вдоль своего направления, – как, например, в реке, русло которой сужается.

Отметим, что не только скорость, но и любая величина, переносимая частицами текущей жидкости, подчиняется такому же правилу взятия полной производной. Поэтому это правило можно написать в виде соотношения между дифференциальными операторами:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla$$

Давление. В правой части уравнения, выражающего второй закон Ньютона, фигурирует сила. Силы, действующие в идеальной жидкости, обусловлены разностью давлений. Давление в жидкости описывается скалярной функцией $p = p(\mathbf{x}, t)$ (закон Паскаля).

Мысленно выделим в жидкости некоторый объем Ω_0, как при выводе уравнения непрерывности. По определению давления, на каждый элемент его поверхности со стороны окружающей жидкости действует сила, равная $-p d\mathbf{s}$ (знак минус возник из-за того, что эта сила направлена внутрь, а вектор площадки – наружу). На весь объем тем самым действует сила

$$-\oint_{\partial\Omega_0} p\, d\mathbf{s} = -\int_{\Omega_0} \nabla p\, d\Omega$$

Стягивая объем в точку, в пределе получим, что на частицу жидкости объема $\delta\Omega$ действует сила $-\nabla p\, \delta\Omega$.

Уравнение движения. Приравняв произведение массы частицы жидкости $\delta m = \rho\delta\Omega$ на ее ускорение силе, получим

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p$$

или

$$\boxed{\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p} \tag{1.5}$$

Это уравнение было получено Эйлером в 1755 году. В индексной записи оно имеет вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\,\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{1.6}$$

Член $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$ делает уравнение Эйлера нелинейным.

Если на жидкость действует внешняя сила, например, сила тяжести, характеризуемая ускорением свободного падения $\mathbf{g}$ (обычно направленным вдоль оси z), ее надо добавить в правую часть:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\,\nabla p + \mathbf{g} \tag{1.7}$$

1.3 Система уравнений движения идеальной жидкости

Уравнение Эйлера (1.7) и уравнение непрерывности (1.1) образуют систему уравнений движения идеальной жидкости:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\dfrac{1}{\rho}\,\nabla p + \mathbf{g} \\[2ex] \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

Ее надо дополнить граничными условиями. Например, для жидкости, заполняющей некоторый объем с неподвижными непроницаемыми стенками, граничное условие заключается в том, что нормальная компонента поля скоростей на границе области равна 0 (жидкость не протекает через стенки).

Без дополнительных предположений система уравнений (1.8) не является замкнутой, поскольку содержит 4 уравнения (одно векторное и одно скалярное) на 5 неизвестных функций (3 компоненты скорости, плотность и давление). Ее надо дополнить уравнением состояния вещества, которое связывает плотность и давление. В общем случае здесь не обойтись без привлечения термодинамики. Для наших целей будет достаточно иметь в виду две модели, которые мы будем называть адиабатической жидкостью и несжимаемой жидкостью.

Адиабатическая жидкость. В этой модели полагают, что давление в каждой точке является некоторой фиксированной функцией плотности в этой же точке: $p(\mathbf{x}, t) = f(\rho(\mathbf{x}, t))$, причем $0 < f'(\rho) < \infty$. Явный вид функции f зависит от конкретной жидкости. Например, в случае идеального газа (который тоже можно формально рассматривать как жидкость) при постоянной температуре давление прямо пропорционально плотности. Если $p = f(\rho)$, можно ввести функцию w такую, что $\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla w$.[1] В терминах w уравнение Эйлера запишется в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla w + \mathbf{g} \tag{1.10}$$

(Функция w дается интегралом $w(\rho) = \int^{\rho} f'(s)s^{-1}ds$.)

Смысл производной $\partial p/\partial\rho$ в адиабатической жидкости можно понять, рассмотрев распространение волн плотности. Линеаризуем систему (1.8) (с $\mathbf{g} = 0$) на фоне тривиального решения $\mathbf{v} = 0$, $\rho = \rho_0 = \text{const}$, $p = \text{const}$ (однородная покоящаяся жидкость). Положим $\rho = \rho_0 + \rho_1$, где $\rho_1 \ll \rho_0$, тогда с точностью до линейных членов по $\mathbf{v}$ и ρ_1 находим из (1.8):

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + c_0^2\frac{\nabla\rho_1}{\rho_0} = 0\\ &\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0(\nabla\cdot\mathbf{v}) = 0\end{aligned}\right.$$

где $c_0^2 = \partial p/\partial\rho\,\Big|_{\rho=\rho_0}$. Взяв $\partial/\partial t$ от второго уравнения и подставив $\partial\mathbf{v}/\partial t$ из первого, придем к волновому уравнению на ρ_1

$$\frac{\partial^2\rho_1}{\partial t^2} - c_0^2\Delta\rho_1 = 0 \tag{1.11}$$

в котором c_0 входит как скорость звука в жидкости. Замкнутое линейное уравнение второго порядка можно получить также для компонент скорости. Воспользовавшись

---

[1] Замечание для знающих термодинамику: функция w имеет термодинамический смысл плотности удельной энтальпии идеальной жидкости. Обозначим через ε плотность удельной внутренней энергии жидкости (это означает, что внутренняя энергия элемента объема жидкости $d\Omega$ равна $dE = \rho\varepsilon d\Omega$). Тогда термодинамическое соотношение гласит

$$w = \varepsilon + \frac{p}{\rho} \tag{1.9}$$

Идеальность жидкости с точки зрения термодинамики означает постоянство энтропии в процессе течения, при этом $\partial p/\partial\rho = c^2$, где c – скорость звука в жидкости.

тождеством $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) = \Delta\mathbf{v} + \nabla\times(\nabla\times\mathbf{v})$, будем иметь

$$\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial t^2} - c_0^2\Delta\mathbf{v} = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{v})$$

что для безвихревых (потенциальных) течений, т.е. таких, что $\nabla\times\mathbf{v} = 0$, превращается в волновое уравнение.

Несжимаемая жидкость. Несжимаемую жидкость формально можно рассматривать как предельный случай адиабатической, в которой $\partial p/\partial\rho = \infty$, т.е. скорость звука бесконечно велика. В несжимаемой жидкости, $\rho = \mathrm{const}$ (положим $\rho = 1$) в любой точке в любой момент времени. Уравнение непрерывности превращается в связь $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$, а из уравнения Эйлера можно исключить давление. Воспользуемся тождеством

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla\left(|\mathbf{v}|^2\right) - \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) \tag{1.12}$$

(докажите его!), чтобы преобразовать уравнение Эйлера к виду

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) = -\nabla\Big(p + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}\Big) + \mathbf{g}$$

и применим к обеим частям операцию $\nabla\times$ (взятие ротора). С учетом того, что $\nabla\times\nabla = 0$, $\nabla\times\mathbf{g} = 0$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{v}) = \nabla\times\Big(\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v})\Big) \tag{1.13}$$

Применив же к обеим частям уравнения Эйлера операцию ∇ (взятие дивергенции), будем иметь (с учетом $\nabla\cdot\mathbf{g} = 0$)

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -\Delta p$$

откуда можно определить давление в жидкости по заданному полю скоростей.

Отметим, что при малых скоростях ($|\mathbf{v}| \ll \sqrt{\partial p/\partial\rho}$) адиабатическую жидкость можно в некотором приближении считать несжимаемой.

Линии тока. Полезным является понятие линий тока жидкости. Это воображаемые линии, касательные к которым указывают направление вектора скорости частицы жидкости в точке касания (в данный момент времени). Это означает, что вектор инфинитезимального смещения $d\mathbf{x}$ вдоль линии тока в каждой точке пропорционален вектору скорости $\mathbf{v}$, т.е. должно быть

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z},$$

что дает систему дифференциальных уравнений для определения линий тока. Линии тока могут пересекаться только в точках, где скорость равна 0 (точки остановки).

При стационарном потоке линии тока остаются неизменными во времени и совпадают с траекториями частиц жидкости. При нестационарном течении это не так: касательные к линии тока дают направления скорости различных частиц жидкости в последовательных (вдоль линии) точках пространства в определенный момент времени, а касательные к траектории дают направления скорости частиц в последовательные моменты времени.

Уравнение Бернулли. В случае стационарного течения жидкости (т.е. такого, что $\partial\mathbf{v} = 0$) уравнение Эйлера можно проинтегрировать и получить соотношение, которое называется уравнением Бернулли. Воспользуемся тождеством (1.12) и представим стационарное уравнение Эйлера $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla w$ в виде

$$\nabla\left(\frac{v^2}{2} + w\right) - \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) = 0$$

где $v = |\mathbf{v}|$. Пусть $\mathbf{l}$ – единичный касательный вектор к некоторой линии тока. По определению градиента $\mathbf{l}\cdot\nabla$ есть производная $\partial/\partial l$ вдоль направления касательной. Взяв скалярное произведение обеих частей стационарного уравнения Эйлера с вектором $\mathbf{l}$, получим

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2} + w\right) = 0$$

поскольку вектор $\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v})$, очевидно, ортогонален вектору скорости, а значит и касательной к линии тока. Следовательно, величина в скобках постоянна вдоль линии тока:

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + w = \mathrm{const}} \qquad (1.14)$$

Это и есть уравнение Бернулли. Значение const, вообще говоря, разное для различных линий тока.

В случае, если жидкость находится во внешнем потенциальном поле (например, в поле тяжести $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$), в левую часть надо добавить член, равный потенциальной энергии частицы жидкости, отнесенной к единичной массе:

$$\frac{v^2}{2} + w + gz = \mathrm{const} \qquad (1.15)$$

(Подробный вывод проведите самостоятельно.) Отметим, что функцию w можно интерпретировать как потенциальную энергию частиц жидкости при отсутствии внешнего поля.

Для несжимаемой жидкости ($\rho = 1$) уравнение Бернулли превращается в соотношение

$$\frac{v^2}{2} + p + gz = \mathrm{const} \qquad (1.16)$$

которое называется также *законом Бернулли.* Он был установлен Д.Бернулли в 1738 году (на 18 лет раньше уравнения Эйлера). Большинство оценок в гидродинамике основано на применении закона Бернулли. На “житейском” уровне он означает, что давление в жидкости больше в тех местах, где меньше скорость.

Потенциальные течения. Вектор

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} \tag{1.17}$$

называется *завихренностью.* Уравнение (1.13) можно записать в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) \tag{1.18}$$

Поскольку это уравнение линейно относительно завихренности, $\boldsymbol{\omega} = 0$ является его решением. Течения, для которых $\boldsymbol{\omega} = 0$ во всем пространстве, занятом жидкостью, называют *потенциальными.* Они образуют важный специальный класс течений, для которых динамические уравнения упрощаются.

Из тождественного зануления завихренности следует, что существует скалярное поле φ такое, что

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi$$

Функция φ называется потенциалом скоростей. Для потенциального поля скоростей $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla\Big(|\nabla\varphi|^2\Big)$, и уравнение Эйлера принимает вид

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|\nabla \varphi|^2}{2} + w \right) = 0$$

или, после интегрирования,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|\nabla \varphi|^2}{2} + w = C(t) \tag{1.19}$$

По сравнению с законом Бернулли, константа интегрирования $C(t)$ в потенциальном течении одна и та же для всех линий тока. Она может быть положена равной нулю после общего сдвига поля φ на зависящую от времени величину.

В случае стационарного потенциального течения адиабатической жидкости уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -c^2(\rho)\dfrac{\nabla \rho}{\rho} \\ \\ \nabla(\rho \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\rho + \rho(\nabla \cdot v) = 0 \end{cases} \tag{1.20}$$

где c^2 – квадрат скорости звука. Умножив первое уравнение скалярно на $\mathbf{v}$ и подставив в правую часть второе уравнение, получим

$$\frac{1}{2}(\mathbf{v} \cdot \nabla)v^2 - c^2(\nabla \cdot v)^2 = 0 \tag{1.21}$$

В терминах потенциала скоростей (в двух измерениях) это уравнение запишется в виде

$$(c^2 - \varphi_x^2)\varphi_{xx} + (c^2 - \varphi_y^2)\varphi_{yy} = 2\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} \tag{1.22}$$

В пределе $c \to \infty$, соответствующем несжимаемой жидкости, отсюда получается уравнение Лапласа $\Delta\varphi = 0$.

Уравнение (3.4) не поддается решению аналитическими методами. Для практики важен случай плоского течения, обтекающего узкое тело (крыло в потоке воздуха). В этом случае можно искать φ в виде $\varphi = v_0 x + \psi$, где v_0 – скорость потока, а ψ описывает возмущение потока телом и предполагается малым. Линеаризация уравнения (3.4) дает $(c^2 - v_0^2)\psi_{xx} + c^2\psi_{yy} = 0$ или

$$(1 - M^2)\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0$$

где $M = v_0/c$ – число Маха. Видим, что при $M < 1$ (дозвуковые скорости) это уравнение эквивалентно уравнению Лапласа. При $M > 1$ (сверхзвуковые скорости) уравнение становится гиперболическим, и характер течения радикально меняется.

В случае потенциального течения несжимаемой идеальной жидкости гидродинамические уравнения сводятся к уравнению Лапласа для φ: $\nabla^2\varphi = \Delta\varphi = 0$ (плюс граничные условия). Его решение определяет скорость $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ и давление $p = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{|\nabla\varphi|^2}{2}$. Для стационарных потенциальных течений в двух измерениях уравнение Лапласа на φ следует также из (3.4) в пределе $c \to \infty$.

1.4 Законы сохранения

Сохранение импульса. Импульс частицы жидкости объема $d\Omega$ равен $\rho\mathbf{v}d\Omega$. Найдем скорость его изменения $\dfrac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t}\, d\Omega$, понимая под этим *частную* производную по времени, т.е. скорость изменения импульса жидкости, заполняющей некоторый мысленно выделенный инфинитезимальный объем $d\Omega$, "привязанный" к данной точке пространства. Вычисления удобно проводить в индексных обозначениях. Имеем:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = \frac{\partial\rho}{\partial t}\, v_i + \rho\,\frac{\partial v_i}{\partial t}$$

В первом члене выразим производную по времени с помощью уравнения непрерывности (1.3), а во втором – с помощью уравнения Эйлера (1.6). Тогда получим:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} - \rho v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

Последние два члена собираются в $\partial(\rho v_i v_k)/\partial x_k$. Написав $\partial/\partial x_i = \delta_{ik}\partial/\partial x_k$, окончательно получим

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \tag{1.23}$$

где совокупность величин

$$T_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k \tag{1.24}$$

называется тензором плотности потока импульса (правильнее сказать, что это его компоненты в лабораторной системе координат). На уравнение (1.23) можно смотреть как на одну из форм записи уравнения Эйлера.

Для выяснения смысла тензора T_{ik} проинтегрируем уравнение (1.23) по некоторому объему Ω_0, как при выводе уравнения непрерывности. Преобразовав стоящий в правой части объемный интеграл в интеграл по поверхности $\partial\Omega_0$ с помощью теоремы Гаусса, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_0}\rho v_i\, d\Omega = -\oint_{\partial\Omega_0} T_{ik} ds_k \tag{1.25}$$

Здесь ds_k – компоненты вектора $d\mathbf{s}$. Слева стоит скорость изменения i-й компоненты импульса в объеме Ω_0. Поэтому стоящий справа интеграл есть скорость вытекания этого импульса через (воображаемую) границу. Следовательно, величина $T_{ik}ds_k$ имеет смысл скорости вытекания i-й компоненты импульса через элемент $d\mathbf{s}$ граничной поверхности. Введем единичный нормальный вектор $\mathbf{n}$ (направленный по внешней нормали к поверхности), тогда $ds_k = n_k ds$, где ds – площадь элемента поверхности. Мы видим, что $T_{ik}n_k$ есть поток i-й компоненты импульса, отнесенный к единице площади. Таким образом, $T_{ik}\delta s$ есть скорость протекания i-й компоненты импульса через малую площадку δs, нормаль к которой направлена вдоль оси x_k. Иными словами, вектор $p\mathbf{n} + \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathbf{v}$ определяет поток вектора импульса в направлении $\mathbf{n}$, т. е. через площадку, ортогональную к $\mathbf{n}$.

Сохранение энергии. Закон сохранения энергии тоже можно записать в виде, аналогичном (1.25). Его вывод, однако, несколько более сложен и в общем случае требует привлечения термодинамических соображений. Для адиабатической жидкости можно провести следующее вычисление, имитирующее вывод с использованием термодинамики.

Начнем с системы уравнений (1.8) без внешнего поля, которую запишем в виде

$$\begin{cases} \rho\,\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \nabla p = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla\cdot\mathbf{v}) + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\rho = 0 \end{cases} \tag{1.26}$$

Первое уравнение умножим скалярно на $\mathbf{v}$, второе умножим на $v^2/2$, а затем сложим получившиеся равенства:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\rho v^2}{2}\Big) + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\Big(\frac{\rho v^2}{2} + p\Big) + \frac{\rho v^2}{2}\,(\nabla\cdot\mathbf{v}) = 0 \tag{1.27}$$

Пусть $e(\rho)$ – некоторая (пока произвольная) функция от ρ. Умножив второе уравнение в (1.26) на $e'(\rho)$, будем иметь $\partial e/\partial t + e'\rho(\nabla\cdot\mathbf{v}) + e'(\mathbf{v}\cdot\nabla)\rho = 0$, или, поскольку $e'(\mathbf{v}\cdot\nabla)\rho = (\mathbf{v}\cdot\nabla)e$,

$$\frac{\partial e}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)e + e'\rho(\nabla\cdot\mathbf{v}) = 0 \tag{1.28}$$

Теперь сложим (1.27) и (1.28). После простых преобразований результат можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + e\right) + \nabla\cdot\left(\mathbf{v}\left[\frac{\rho v^2}{2} + e + p\right]\right) = (e + p - \rho e')\,(\nabla\cdot\mathbf{v})$$

Если теперь выбрать функцию e специальным образом, а именно так, чтобы правая часть обратилась в 0, т. е. потребовать

$$\rho\,\frac{de(\rho)}{d\rho} - e(\rho) = f(\rho) \tag{1.29}$$

(напомним, что для адиабатической жидкости $p = f(\rho)$), данное соотношение принимает вид закона сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + e\right) + \nabla\cdot\left(\mathbf{v}\left[\frac{\rho v^2}{2} + e + p\right]\right) = 0 \tag{1.30}$$

Это и есть закон сохранения энергии в локальной форме (функция $e(\rho)$ – объемная плотность внутренней энергии жидкости).

Обычно этот закон сохранения пишут в несколько ином виде, вводя удельную плотность энергии $\varepsilon = e/\rho$ (это означает, что внутренняя энергия элемента объема жидкости $d\Omega$ равна $dE = \rho\varepsilon d\Omega$). Объемная плотность полной энергии жидкости (кинетическая плюс внутренняя) есть $\dfrac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon$. В терминах функции ε соотношение (1.29) принимает вид

$$\frac{d\varepsilon}{d\rho} = \frac{f(\rho)}{\rho^2} \qquad \text{или} \qquad \varepsilon(\rho) = \int^{\rho} f(s)s^{-2}ds$$

откуда $\rho\varepsilon + p = w$ (см. (1.9)). Закон сохранения (1.30) дает скорость изменения энергии жидкости в элементе объема:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\Big) = -\nabla\cdot\left(\mathbf{v}\Big(\frac{\rho v^2}{2} + \rho w\Big)\right) \tag{1.31}$$

В интегральной форме это соотношение принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_0}\Big(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\Big)d\Omega = -\oint_{\partial\Omega_0}\Big(\frac{\rho v^2}{2} + \rho w\Big)\mathbf{v}\cdot d\mathbf{s} \tag{1.32}$$

Левая часть есть скорость изменения энергии жидкости в некотором объеме пространства. Интеграл справа равен скорости вытекания энергии из этого объема через поверхность. Следовательно, величина

$$\Big(\frac{\rho v^2}{2} + \rho w\Big)\mathbf{v}$$

представляет собой вектор плотности потока энергии.

Сохранение циркуляции скорости. Некоторым аналогом сохранения момента импульса является закон сохранения циркуляции скорости (теорема Томсона). Циркуляцией скорости вдоль некоторого замкнутого контура γ называется величина

$$\Gamma = \oint_{\gamma}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} \tag{1.33}$$

Здесь $d\mathbf{l} = \boldsymbol{\tau}dl$ – вектор, равный по абсолютной величине элементу длины и направленный по касательной к контуру ($\boldsymbol{\tau}$ – единичный касательный вектор, dl – элемент длины). Формула Стокса позволяет представить контурный интеграл (1.33) как поверхностный, который представляет собой поток векторного поля завихренности $\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\mathbf{v}$ через поверхность S, краем которой служит контур γ:

$$\Gamma = \int_S \boldsymbol{\omega}\cdot d\mathbf{s}$$

(интеграл, разумеется, не зависит от выбора S при условии, что $\partial S = \gamma$).

Проведем мысленно замкнутый контур γ в жидкости и найдем полную производную по времени $d\Gamma/dt$. Взятие *полной* производной означает, что мы рассматриваем контур как "жидкий", т. е. составленный из образующих его частиц жидкости, которые перемещаются со временем. Вместе с ними перемещается и сам контур; в частности, может меняться его форма. (Взятие частной производной $\partial\Gamma/\partial t$ означало бы нахождение скорости изменения циркуляции вдоль неподвижного контура.) Приращение циркуляции за время δt есть

$$\delta\Gamma = \delta \oint_\gamma \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau}\, dl = \oint_\gamma \delta\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau}\, dl + \oint_\gamma \mathbf{v}\cdot\delta(\boldsymbol{\tau} dl)$$

где второе слагаемое учитывает изменение формы контура. Нетрудно понять, что $\delta(\boldsymbol{\tau} dl) = d\mathbf{v}\delta t$.[2] Поэтому второй интеграл исчезает как интеграл от полной производной $\mathbf{v}d\mathbf{v} = \frac{1}{2}\, dv^2$ по замкнутому контуру. В первом интеграле подставим $\delta\mathbf{v} = -\nabla w\, \delta t$ согласно уравнению Эйлера. Получим:

$$\delta\Gamma = -\delta t \oint_\gamma \nabla w\cdot\boldsymbol{\tau} dl = -\delta t \int_S (\nabla\times\nabla) w\cdot d\mathbf{s} = 0$$

(второе равенство следует из формулы Стокса, а третье – из того, что $\nabla\times\nabla = 0$). Следовательно,

$$\boxed{\frac{d}{dt}\oint_\gamma \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = 0 \qquad \text{или} \qquad \oint_\gamma \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = \mathrm{const}} \tag{1.34}$$

Это означает, что в идеальной жидкости циркуляция скорости вдоль замкнутого жидкого контура остается постоянной во времени.

1.5 Примеры

Давление в атмосфере (гидростатика). Для покоящейся (или равномерно двигающейся как целое) жидкости без внешних сил уравнение Эйлера гласит, что $\nabla p = 0$, т.е. давление везде в жидкости одинаково. Для равновесной адиабатической жидкости в поле тяжести уравнение Эйлера принимает вид

$$\nabla p = \rho\, \mathbf{g} \tag{1.35}$$

В случае идеального газа $p = \rho T$, где T – температура. Считая поле тяжести однородным, пишем $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$, где $\mathbf{e}_z$ – единичный вектор вдоль оси z. Уравнение сводится к $T\partial\rho/\partial z = -g\rho$; решение имеет вид $\rho(z) = \rho_0 e^{-gz/T}$. Для земной атмосферы высота, на которой ее плотность падает в e раз (характерная толщина атмосферы) по порядку величины равна $T/g \sim 8$ км. На самом деле это очень грубая оценка, поскольку температура в атмосфере зависит от высоты.

Форма поверхности вращающейся жидкости. Определим форму поверхности жидкости в поле тяжести в цилиндрическом сосуде (ведре), вращающемся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω_0. Жидкость будем считать несжимаемой.

[2] В самом деле, рассмотрим в момент времени t две близкие точки на контуре γ: $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}+d\mathbf{l}$. За время δt находящиеся в них частицы жидкости переместятся соответственно в точки $\mathbf{x} + \mathbf{v}\delta t$ и $\mathbf{x}+d\mathbf{l} + (\mathbf{v}+d\mathbf{v})\delta t$. Разность этих векторов, равная $d\mathbf{l} + d\mathbf{v}\delta t$, есть то, во что переехал вектор $d\mathbf{l}$ за время δt. Поэтому $\delta(d\mathbf{l}) = \delta(\boldsymbol{\tau} dl) = d\mathbf{v}\delta t$.

Выберем ось z вдоль оси цилиндра, тогда $v_x = -\omega_0 y$, $v_y = \omega_0 x$, $v_z = 0$. Отметим, что завихренность такого поля скоростей постоянна в любой точке внутри жидкости: $\boldsymbol{\omega} = 2\omega_0 \mathbf{e}_z$. Уравнение непрерывности $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$ выполняется тождественно, а стационарное уравнение Эйлера $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{g}$ в развернутом виде дает

$$-\omega_0 y \partial_x \begin{pmatrix} -\omega_0 y \\ \omega_0 x \\ 0 \end{pmatrix} + \omega_0 x \partial_y \begin{pmatrix} -\omega_0 y \\ \omega_0 x \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \partial_x p \\ \partial_y p \\ \partial_z p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

откуда $\partial p/\partial x = x\omega_0^2$, $\partial p/\partial y = y\omega_0^2$, $\partial p/\partial z = -g$. Интегрируя эти уравнения, получаем

$$p = p_0 + \frac{\omega_0^2}{2}\,(x^2 + y^2) - gz$$

На свободной поверхности жидкости должно быть $p = \text{const}$, так что ее форма определяется уравнением $z = \frac{\omega_0^2}{2g}\,(x^2 + y^2)$ (начало координат в нижней точке поверхности).

Обтекание шара. Важным примером потенциального течения является обтекание шара. Пусть шар радиуса R движется с постоянной скоростью $\mathbf{u}$ в несжимаемой идеальной жидкости. Начало координат выберем в центре шара. С увеличением расстояния от шара $r = |\mathbf{x}|$ скорость жидкости стремится к нулю. Поэтому нам нужно спадающее до нуля на бесконечности решение уравнения Лапласа. Такими решениями являются $1/r$ и производные от него по координатам различных порядков. Вместе с тем ясно, что в решение должен войти вектор скорости шара $\mathbf{u}$. Единственным скаляром, который можно составить из $\mathbf{u}$ и производных от $1/r$ является $\mathbf{u}\cdot\nabla(1/r)$. Решение ищем в виде

$$\varphi = A\mathbf{u}\cdot\nabla(1/r) = Au_i\partial_i(1/r) = -A\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{r^2}$$

где $\mathbf{n}$ – единичный нормальный вектор к поверхности шара (направленный наружу) с компонентами $n_i = x_i/R$, а A – подлежащий определению множитель. Он находится из граничного условия $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$ равенства нормальных компонент скоростей $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ при $r = R$. Поле скоростей имеет вид

$$v_i = \partial_i\varphi = -Au_k\partial_i\Big(\frac{x_k}{r^3}\Big) = -\frac{A}{r^3}\left(u_i - \frac{3x_i x_k u_k}{r^2}\right)$$

и граничное условие дает $A = R^3/2$. В ответе получаем

$$\varphi = -\frac{R^3}{2r^2}\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,, \qquad \mathbf{v} = \frac{R^3}{2r^3}\Big(3\mathbf{n}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) - \mathbf{u}\Big)\,, \qquad r \geq R.$$

Как и потенциал φ, все компоненты скорости являются гармоническими функциями.

На самом деле полученное решение имеет мало общего с тем, как обтекание шара (или какого-либо другого тела) происходит в реальности. Во-первых, найденное решение неустойчиво относительно малых возмущений. Во-вторых, наличие сколь угодно малой вязкости меняет структуру решения. Наконец, из этого решения следует прямо противоречащий практике вывод, что шар при движении не испытывает силу сопротивления со стороны жидкости (поток энергии через сферу на бесконечности равен нулю).

Уравнение Хопфа. Для иллюстрации того, какими свойствами могут обладать решения уравнений движения идеальной жидкости в случае нестационарного потока, рассмотрим предельно упрощенный пример одномерного гиперзвукового потока ($v \gg c$). Поскольку правая часть уравнения Эйлера пропорциональна c^2, ей можно пренебречь, и уравнение Эйлера сведется к уравнению Хопфа

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{1.36}$$

Его общее решение $v(x,t)$ записывается в неявной форме:

$$v(x,t) = F\Big(x - v(x,t)t\Big)$$

где F – произвольная функция, которая определяется начальным условием: $F(x) = v(x,0)$. В самом деле, прямое дифференцирование приводит к соотношению

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big(1 + tF'(x - vt)\Big) = 0$$

из которого следует (1.36).

Эволюция гладкого начального условия для уравнения Хопфа может приводить к образованию сингулярности за конечное время. Рассмотрим сначала начальное условие $v(x,0) = \alpha x$. Решение имеет вид $v(x,t) = \alpha x/(1+\alpha t)$. Если $\alpha > 0$, оно определено при всех $t \geq 0$. Но при $\alpha < 0$ имеется критическое значение $t_* = -1/\alpha$, при котором производная $\partial v/\partial x$ в 0 обращается в ∞.

Для более детального анализа аппроксимируем фронт волны вблизи точки перегиба выражением $v(x,0) = \alpha x + \beta x^3$ ($\beta > 0$) и посмотрим на его эволюцию при малых x. Положим $y = x - vt$, $\tau = 1/t$, тогда решение уравнения Хопфа запишется в виде

$$\beta y^3 + (\tau - \tau_*)y = \tau x$$

где $\tau_* = -\alpha$. При $\tau = \tau_*$ имеем $x - \dfrac{v}{\tau_*} = \left(\dfrac{\tau_* x}{\beta}\right)^{1/3}$ и при малых x, когда первый член с левой части пренебрежимо мал по сравнению с остальными, получается

$$v(x,t_*) \cong -\left(\frac{\alpha^4 x}{\beta}\right)^{1/3}$$

Формальное продолжение этого решения за критическую точку дает профиль скоростей в виде неоднозначной функции (“опрокидывание” фронта волны), что не имеет прямого физического смысла.

2 Вязкая жидкость

2.1 Уравнение Навье-Стокса

В идеальной жидкости различные ее слои могут свободно скользить друг по другу. Реальная же жидкость обладает *вязкостью*, т. е. между соприкасающимися слоями, двигающимися с разной скоростью, возникают силы внутреннего трения. Для учета этих сил необходимо модифицировать уравнение Эйлера. (Уравнение непрерывности не меняется, поскольку означает сохранение массы.)

В качестве отправной точки удобно взять уравнение Эйлера в форме (1.23), $\dfrac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\dfrac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$, которая остается неизменной; модификации подлежит только тензор плотности потока импульса T_{ik}. Тензор T_{ik}, определяемый формулой (1.24), описывает обратимый перенос импульса, связанный с механическим перемещением объемов жидкости из одного места в другое, обусловленным силами давления. Вязкость в жидкости проявляется в наличии еще дополнительного, необратимого, переноса импульса из мест с большей в места с меньшей скоростью. Соответственно этому, к тензору (1.24) надо добавить дополнительный член $-\sigma_{ik}$, описывающий "вязкий" перенос импульса:

$$T_{ik} = p\delta_{ik} + v_i v_k - \sigma_{ik}$$

Тензор σ_{ik} называется вязким тензором напряжений. Его явный вид определяется из следующих соображений. Поскольку силы трения возникают только в случае, когда различные участки жидкости движутся с разной скоростью, σ_{ik} должен зависеть от производных скорости по координатам, но не от самой скорости. В первом приближении можно считать, что σ_{ik} зависит от первых производных скорости $\partial v_i/\partial x_k$ линейно. Вместе с тем, σ_{ik} должен быть равен 0, если жидкость вращается как целое с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0$, поскольку в этом случае трение между различными слоями жидкости отсутствует. При таком вращении $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{x}$, т. е. $v_i = \epsilon_{ijk}\,\omega_{0\,j}\,x_k$, и в нуль при этом обращаются симметричные линейные комбинации $\partial v_i/\partial x_k + \partial v_k/\partial x_i$. Поэтому общий вид тензора σ_{ik} может быть такой:

$$\sigma_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\,\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}$$

Коэффициенты вязкости η, ζ не зависят от скорости. Члены в этой формуле сгруппированы таким образом, что выражение в скобках зануляется при свертывании индексов (при суммировании компонент с $i = k$). Коэффициент ζ часто называют второй вязкостью. В несжимаемой жидкости члены с дивергенцией $\partial v_l/\partial x_l$ отсутствуют, т. е. $\sigma_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)$.

Добавочный член в правой части уравнения Эйлера, обусловленный вязкостью, есть тем самым

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \eta\Delta v_i + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nabla\cdot\mathbf{v}\right)$$

что приводит к уравнению движения

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right) = -\nabla p + +\eta\Delta\mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})} \qquad (2.1)$$

Это – знаменитое уравнение Навье-Стокса. В случае несжимаемой жидкости оно упрощается, поскольку последний член в правой части обращается в нуль. В этом случае мы будем писать уравнение Навье-Стокса в виде

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v}} \qquad (2.2)$$

где $\nu = \eta/\rho_0$ – так называемая кинематическая вязкость (напомним, что в несжимаемой жидкости мы полагаем $\rho_0 = 1$). В компонентах:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i \tag{2.3}$$

Как будет показано ниже, $\nu > 0$.

Для решения уравнения Навье-Стокса необходимо задать еще граничные условия. Условие равенства нулю нормальной компоненты скорости на неподвижной поверхности (непротекание жидкости через стенки) надо дополнить условием равенства нулю также и тангенциальных компонент ("прилипание" жидкости к стенкам), т. е. нулю на неподвижной поверхности должен быть равен сам вектор скорости $\mathbf{v}$. В общем случае движущейся поверхности скорость жидкости должна быть равна ее скорости в любой точке на границе. Мы видим, что уравнение Навье-Стокса требует более сильных граничных условий, чем уравнение Эйлера. Это связано с тем, что оно содержит производные более высокого порядка.

2.2 Диссипация энергии

Наличие вязкости приводит к диссипации энергии, т. е. переходу кинетической энергии во внутреннюю (в тепло). Вычисление диссипации особенно просто для несжимаемой жидкости.

Пусть Ω_0 – некоторый объем, на границе которого жидкость покоится. Полная кинетическая энергия несжимаемой жидкости равна

$$E = \int_{\Omega_0} \frac{v^2}{2}\, d\Omega$$

Найдем производную по времени от плотности кинетической энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{v^2}{2} = v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} = v_i \left(-v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i \right)$$

где $\partial v_i/\partial t$ выражено с помощью уравнения Навье-Стокса (2.3). Пользуясь несжимаемостью жидкости ($\partial v_k/\partial x_k = 0$), преобразуем это выражение к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{v^2}{2} = -\nabla \left[\mathbf{v} \Big(\frac{v^2}{2} + p \Big) \right] + \nu v_i \Delta v_i$$

Первый член есть поток энергии, связанный с механическим переносом массы. Он совпадает с потоком энергии идеальной жидкости. После интегрирования по объему Ω_0 он обращается в нуль. Таким образом,

$$\dot{E} = \nu \int_{\Omega_0} v_i \Delta v_i \, d\Omega = -\nu \int_{\Omega_0} (\partial v_i/\partial x_k)^2 \, d\Omega < 0 \quad (\text{при } \nu > 0)$$

Второе равенство имеет место в силу теоремы Грина (поверхностный интеграл исчезает) и бездивергентности поля скоростей. Вывод: при положительном коэффициенте вязкости механическая энергия жидкости может только уменьшаться (с переходом в тепло).

2.3 Примеры

2.3.1 Пуазейлевы течения

Стационарные течения вязкой жидкости между неподвижными стенками называют пуазейлевыми. Примером пуазейлева течения является течение по трубе.

Течение по трубе. Рассмотрим стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в трубе кругового сечения радиуса R (силой тяжести пренебрегаем). Ось трубы пусть будет осью z. Скорость жидкости $v = v_z$ везде направлена вдоль оси z и является функцией от x, y. Уравнение непрерывности выполняется тождественно, а уравнение Навье-Стокса дает

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \Delta_2 v = \frac{1}{\nu}\frac{\partial p}{\partial z}$$

где $\Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ – оператор Лапласа в плоскости x, y. Левая часть зависит только от x, y, а правая – только от z, откуда заключаем, что обе они равны одной и той же константе C. Пусть δp – разность давлений на концах трубы, а L – ее длина, тогда $C = -\dfrac{\delta p}{\nu L}$, и, расписывая лапласиан в полярных координатах, имеем уравнение

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) = -\frac{\delta p}{\nu L}$$

общее решение которого таково:

$$v = -\frac{\delta p}{4\nu L}\, r^2 + a\log r + b$$

Надо положить $a = 0$, поскольку решение не должно иметь особенностей. Из граничного условия $v(R) = 0$ находим b и распределение скоростей:

$$v(r) = \frac{\delta p}{4\nu L}\,(R^2 - r^2) \tag{2.4}$$

Течение между параллельными плоскостями. Другой важный пример пуазейлева течения – стационарное течение жидкости между двумя плоскопараллельными пластинами при наличии градиента давления. Оси координат x, y расположим в плоскости пластин, ось x выберем в направлении течения, z будет тогда координатой в направлении, ортогональном пластинам. Скорость $\mathbf{v} = v(z)\mathbf{e}_x$, очевидно, зависит только от z. Компоненты уравнения Навье-Стокса дают

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Второе уравнение говорит, что давление постоянно вдоль толщины слоя между пластинами. Тогда в первом уравнении слева стоит функция только от x, а справа – только от z. Значит, как и в предыдущем примере, обе равны одной и той же константе. Таким образом, $\partial p/\partial x = -C = \mathrm{const}$, т. е. давление линейно зависит от координаты x вдоль потока. Будем считать, что $C > 0$, при этом жидкость течет в сторону убывания давления в положительном направлении оси x. Для скорости получаем

$$v = -\frac{C}{2\nu}\,z^2 + az + b$$

Постоянные a, b находятся из граничных условий $v(0) = v(h) = 0$ (h – расстояние между пластинами). В итоге находим параболический профиль скоростей:

$$v(z) = \frac{C}{2\nu}\,z(h-z) \tag{2.5}$$

Наибольшая скорость достигается посередине между пластинами. Усреднение по координате z дает среднее по толщине слоя значение скорости

$$\bar{v} = \frac{1}{h}\int_0^h v(z)dz = -\frac{h^2}{12\nu}\,\frac{dp}{dx}. \tag{2.6}$$

Подчеркнем, что в этом и предыдущем примерах наличие градиента давления обусловлено вязкостью жидкости. Идеальная несжимаемая жидкость текла бы по трубе и при отсутствии градиента давления. Как видно из (2.6), предел $\nu \to 0$ устроен так, что отношение $\nabla p/\nu$ остается конечным.

2.3.2 Течение Стокса

Для рассмотренных выше примеров пуазейлевых течений левая часть уравнения Навье-Стокса тождественно обращалась в нуль. Есть и другие случаи, в которых левая часть уравнения Стокса не играет существенной роли. Так, для медленных течений, в которых скорости малы по абсолютной величине, квадратичный по скоростям член в левой части пренебрежимо мал на фоне линейных. А для течений, в которых и изменения скорости со временем происходят в определенном смысле медленно, можно пренебречь также и первым членом в левой части (частной производной по времени). Такие течения называются *течениями Стокса* или потоками Стокса. Динамическое уравнение в этом случае имеет вид

$$\nu\Delta\mathbf{v} = \nabla p \tag{2.7}$$

Его надо дополнить уравнением несжимаемости $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$. Применением операций ∇ и $\nabla\times$ к (2.7) получаются соответственно уравнения

$$\Delta p = 0, \quad \Delta\boldsymbol{\omega} = 0 \tag{2.8}$$

Отметим также, что следствием полученных уравнений является

$$\Delta^2\mathbf{v} = 0 \tag{2.9}$$

т. е. все компоненты скорости – бигармонические функции. (Вспомним, что при потенциальном течении идеальной жидкости все компоненты скорости – гармонические функции.)

Рассмотрим, например, обтекание неподвижного шара вязкой жидкостью при стоксовом течении (иногда под течением Стокса понимают именно этот процесс).

Пусть радиус шара равен R, а скорость потока на бесконечности $\mathbf{u}$. Нам надо решить ураавнение (2.7) в области $|\mathbf{x}| > R$ с граничным условием $\mathbf{v} = 0$ на поверхности шара и условием $\mathbf{v}(\infty) = \mathbf{u}$. В задаче есть единственный выделенный вектор $\mathbf{u}$. Будем искать компоненты скорости и давление в виде

$$v_i = u_i + \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij}\Delta\chi\right) u_j\,, \quad p = \nu u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Delta\chi$$

где χ – некоторая функция, зависящая только от r; подстановка в (2.7) приводит к уравнению

$$\Delta^2\chi = 0 \tag{2.10}$$

на χ, т. е. χ должна быть сферически симметричной бигармонической функцией. Таким образом, имеем

$$\Delta^2\chi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Delta\chi}{\partial r}\right) = 0$$

откуда $\Delta\chi = 2a/r + c$, где a, c – постоянные. Легко видеть, что если мы хотим $\mathbf{v}(\infty) = \mathbf{u}$, надо положить $c = 0$. Интегрируя уравнение $\Delta\chi = 2a/r$, находим

$$\chi = ar + \frac{b}{r}$$

(с точностью до несущественной аддитивной постоянной). Для скорости и давления получаем:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - a\,\frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})}{r} - b\,\frac{\mathbf{u} - 3\mathbf{n}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})}{r^3}\,, \quad p = p_0 + 2\nu a\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{r^2}$$

Обратим внимание, что для давления получилось поле диполя, которое уже встречалось при анализе обтекания шара идеальной жидкостью (но там это было не давление, а потенциал скоростей). Постоянные a, b находятся из граничного условия $\mathbf{v} = 0$ при $r = R$. Коэффициенты при $\mathbf{u}$ и $\mathbf{n}$ должны обращаться в 0 каждый в отдельности, что дает $a = 3R/4$, $b = R^3/4$.

Вычисление силы, действующей на шар со стороны текущей жидкости, проводится с помощью формулы

$$F_i = \oint T_{ik} n_k ds, \quad T_{ik} = p\delta_{ik} - \nu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)$$

Результат вычисления:

$$F = 6\pi R\nu u \tag{2.11}$$

2.3.3 Течение Хеле-Шоу и лапласовский рост

Рассмотрим опять стоксово течение вязкой жидкости между двумя плоскопараллельными пластинами, предполагая щель очень узкой. Тогда основной интерес представляет усредненная по ширине щели скорость (2.6). Эту формулу можно распространить на потоки, поле скоростей которых не обязательно постоянно в плоскости пластин (т. е. может зависеть от x, y). а также на нестационарные потоки. Такое приближение разумно, если характерное расстояние, на котором меняется скорость, много меньше ширины щели, и если изменения скорости происходят медленно. Таким образом, двумерная скорость потока (после усреднения по поперечному направлению) становится пропорциональной градиенту давления:

$$\mathbf{v} = -\frac{h^2}{12\nu}\,\nabla p$$

Это соотношение называется законом Дарси. Подчеркнем, что скорость и градиент здесь – двумерные векторы в плоскости пластин[3].

Течения вязкой жидкости в узких щелях называются течениями Хеле-Шоу, а сам прибор, позволяющий осуществить их в лабораторных условиях – ячейкой Хеле-Шоу. Можно сказать, что течения Хеле-Шоу получаются из течений Стокса усреднением по ширине щели между пластинами.

Взяв дивергенцию от обеих частей закона Дарси, найдем, что давление – гармоническая функция: $\Delta p = 0$. Этот вывод требует некоторого уточнения, поскольку непостоянная функция не может быть гармонической на всей плоскости (предполагается, что плоскость пополнена бесконечно удаленной точкой). Градиент давления, без которого не будет динамики, создается источниками и стоками жидкости ("насосами"). Наличие насоса мощности Q в точке $\mathbf{a}$ эквивалентно δ-функции в правой части уравнения: $\Delta p = Q\delta(\mathbf{x}-\mathbf{a})$, что, в свою очередь, означает особенность у функции p в точке $\mathbf{a}$. Источник или сток на бесконечности означает логарифмическую асимптотику $p \sim -Q\log r$ при $r \to \infty$.

Особый интерес течения Хеле-Шоу представляют в случае, когда вязкая жидкость в щели соприкасается с несмешивающейся с ней жидкостью с пренебрежимо малой вязкостью (нефть и вода). Граница раздела между ними – некоторая плоская кривая Γ, форма которой в результате отсасывании вязкой жидкости начинает зависеть от времени. Закон движения границы раздела определяется законом Дарси, который говорит, что нормальная составляющая скорости границы (которая только и имеет физический смысл) пропорциональна нормальной производной давления на границе:

$$v_n = -\,\partial_n p \quad \text{на } \Gamma \tag{2.12}$$

(коэффициент фильтрации положен равным 1). Т. к. вязкая жидкость движется в сторону убывания давления, скорость v_n считается положительной, если она направлена в сторону из области, занятой вязкой жидкостью. Таким образом, область, ограниченная кривой Γ, меняет свою форму (растет) согласно градиенту заданной в ней гармонической функции. Процессы такого типа называются лапласовским ростом. Они описываются краевой задачей для оператора Лапласа с подвижной границей.

Предположим, что компактная область D_+ заполнена нефтью, а окружающая ее область D_- – водой, и происходит откачка нефти из точки $\mathbf{0} \in \mathsf{D}_+$. Для нахождения нормальной скорости движения границы $\Gamma = \partial\mathsf{D}_+$ в каждой ее точке нужно решить уравнение Лапласа с источником в D_+, т. е. $\Delta p = Q\delta(\mathbf{x})$ и граничным условием

[3] В теории фильтрации рассматривают также потоки, динамика которых определяется законом Дарси в трех измерениях (просачивание жидкости через пористую среду): $\mathbf{v} = -K\nabla p$. Коэффициент K называется коэффициентом фильтрации.

$p = 0$ на Γ. Последнее представляет собой некоторую идеализацию, поскольку даже если считать воду идеальной жидкостью (и тогда давление в ней можно положить равным нулю), возможен скачок давления на границе, величина которого пропорциональна кривизне и коэффициенту поверхностного натяжения. В идеализированной постановке этот коэффициент считается равным 0, так что скачка давления нет.

В двух измерениях удобно пользоваться комплексными координатами $z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$. Задачу лапласовского роста можно сформулировать следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta p(z,\bar{z}) = Q\delta(z), \quad z \in \mathsf{D}_+ \\ p(z,\bar{z}) = 0, \quad z \in \Gamma \\ v_n(z,\bar{z}) = -\partial_n p(z,\bar{z}), \quad z \in \Gamma \end{cases} \tag{2.13}$$

В этой идеализированной постановке она оказывается тесно связанной с такими разделами математики и математической физики, как обратная задача теории потенциала (в двух измерениях), теория интегрируемых систем, случайные матрицы.

Связь с обратной задачей теории потенциала ясна из следующего замечательного наблюдения (теорема Ричардсона): гармонические моменты области[4]

$$C_k = \int_{D_+} z^k dxdy\,, \quad k \geq 1$$

являются интегралами движения: $\frac{d}{dt}C_k = 0$, а площадь $C_0 = \int_{D_+} dxdy$ области D_+ линейно зависит от времени: $\frac{d}{dt}C_0 = -Qt$. Можно сказать, что динамика лапласовского роста линеаризуется в пространстве гармонических моментов. Это утверждение следует из общего соотношения

$$\frac{d}{dt}\int_{D_+} h(z)dxdy = -Qh(0)$$

где $h(z)$ – произвольная гармоническая функция в области, содержащей D_+. Это последнее соотношение доказывается следующей цепочкой равенств с использованием теоремы Грина:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{D_+} h(z)dxdy &= -\oint_{\partial D_+} h(z)\partial_n p(z)|dz| \\ &= \oint_{\partial D_+} \Big(p(z)\partial_n h(z) - h(z)\partial_n p(z)\Big)|dz| \quad (\text{т.к. } p=0 \text{ на } \partial D_+) \\ &= \int_{D_+} \Big(p(z)\Delta h(z) - h(z)\Delta p(z)\Big)dxdy \quad (\text{но } h(z)=0) \\ &= -\int_{D_+} h(z)\Delta p(z)dxdy = -Qh(0) \end{aligned}$$

[4] Они же коэффициенты мультипольного разложения двумерного (логарифмического) кулоновского потенциала, созданного равномерно распределенным зарядом в D_+.

2.3.4 Уравнение Бюргерса

Рассмотрим теперь режим, прямо противоположный течениям Стокса – гиперзвуковой поток сжимаемой жидкости, в котором нелинейные и нестационарные члены играют определяющую роль, но можно пренебречь давлением. При учете вязкости для одномерного гиперзвукового потока вместо уравнения Хопфа (1.36) получается уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \nu\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{2.14}$$

Подстановкой $v = -2\nu\partial_x \log n$ оно сводится к уравнению теплопроводности на n

$$\partial_t n = \nu\partial_x^2 n \tag{2.15}$$

общее решение которого можно выписать с помощью функции Грина

$$G(x, x'; t) = \frac{e^{-\frac{(x-x')^2}{4\nu t}}}{\sqrt{4\pi\nu t}}$$

в виде

$$n(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,x';t) n(x',0) dx'$$

Соответственно можно написать и общее решение уравнения Бюргерса:

$$v(x,t) = -2\nu\frac{\partial}{\partial x}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} G(x,x';t) e^{-\frac{1}{2\nu}\int^{x'} v(s,0)ds} dx'\right\} \tag{2.16}$$

2.4 Закон подобия и число Рейнольдса

В теории вязкой жидкости важную роль играют простые соображения подобия, основанные на размерности физических величин. Легко убедиться, что величины, входящие в уравнение Навье-Стокса, имеют следующие размерности:

$$[v] = \text{м/с}\,,\quad [p] = \text{кг/(м·с}^2),\quad [\rho] = \text{кг/м}^3,\quad [\nu] = \text{м}^2\text{/с}$$

Будем рассматривать стационарные течения несжимаемой жидкости. Течение жидкости зависит посредством граничных условий от формы и размеров находящегося в ней тела. При заданной форме тела его геометрические свойства определяются характерным размером l, а характерную скорость жидкости (например, скорость потока вдали от тела) обозначим через u. Таким образом, имеем три параметра: ν, l, u. Из них можно составить всего одну независимую безразмерную комбинацию ul/ν. Этот параметр называется *числом Рейнольдса*:

$$\boxed{\mathrm{R} = \frac{ul}{\nu}} \tag{2.17}$$

Будем измерять длины в единицах l, а скорости – в единицах u, т. е. введем обезразмеренные величины $\mathbf{x}' = \mathbf{x}/l$, $\mathbf{v}' = \mathbf{v}/u$ и $\dfrac{p'}{\rho'} = \dfrac{l}{u\nu}\,\dfrac{p}{\rho}$. Тогда ясно, что $\mathbf{v}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathrm{R})$, где $\mathbf{f}$ – некоторая вектор-функция, или

$$\mathbf{v} = u\mathbf{f}(\mathbf{x}/l, \mathrm{R}) \tag{2.18}$$

(закон подобия). Смысл этого соотношения в том, что в двух различных течениях одного и того же типа (например, обтекание шаров различного радиуса жидкостями с различной вязкостью) безразмерные скорости $\mathbf{v}/u$ являются одинаковыми функциями отношения $\mathbf{x}/l$, если числа Рейнольдса для этих течений одинаковы.

Аналогичные соображения применимы и к величинам, характеризующим течение жидкости, но не являющимся функциями координат. Рассмотрим, например, действующую на обтекаемое тело силу сопротивления F. Можно утверждать, что безразмерное отношение F к составленной из ν, u, l, ρ величине размерности силы должно быть функцией только от R: $F = \rho u^2 l^2 f(\mathrm{R})$.

Уравнение Навье-Стокса в безразмерных переменных запишется в виде

$$\mathrm{R}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla(p/\rho) + \Delta\mathbf{v}$$

(здесь мы не пишем штрихи). Отсюда видно, что при $\mathrm{R} \ll 1$ членом в левой части можно пренебречь, и мы имеем стоксово течение. Наоборот, очень большие R эквивалентны очень малой вязкости, и при $\mathrm{R} \gg 1$ жидкость может рассматриваться как идеальная (вдали от твердых стенок).

2.5 Пограничный слой

Граничные условия на твердых стенках для вязкой жидкости требуют обращения в нуль вектора скорости. В то же время при больших числах Рейнольдса жидкость можно рассматривать как идеальную, и тогда в нуль должна обращаться только нормальная компонента скорости. Касательная к твердой стенке компонента может в идеальной жидкости оставаться конечной. Отсюда ясно, что при больших R падение касательной компоненты до нуля будет происходить почти полностью в тонком пристеночном слое жидкости, который называется пограничным слоем. В нем градиенты скорости велики, и потому вязкий член в уравнении Навье-Стокса, состоящий из пространственных производных скорости, не мал, несмотря на то, что ν мало. Поэтому в пограничном слое вязкостью пренебречь нельзя даже при больших R. Вместе с тем толщина его с ростом R стремится к нулю. Заметим, что жидкость в пограничном слое можно считать несжимаемой, поскольку скорости малы (много меньше скорости звука).

Уравнение Прандтля. Рассмотрим двумерное стационарное обтекание жидкостью плоского участка поверхности (стенки). Координаты на этой плоскости будут x, z, причем ось x направлена вдоль потока. Ось y перпендикулярна стенке. Компоненты скорости v_x, v_y не зависят от z (причем $v_y/v_x \ll 1$), $v_z = 0$. Система точных гидродинамических уравнений, записанная в компонентах, такова:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

$$v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right) \tag{2.19}$$

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)$$

(уравнение непрерывности и две нетривиальные компоненты уравнения Навье-Стокса). Пусть l – характерный размер, а U_0 – характерная скорость в данной задаче (например, скорость потока на бесконечности). Введем безразмерные переменные согласно равенствам:

$$x = lx', \quad y = \frac{ly'}{\sqrt{\mathrm{R}}}, \quad v_x = U_0 v'_x, \quad v_y = \frac{U_0 v'_y}{\sqrt{\mathrm{R}}}, \quad p = U_0^2 p',$$

где $\mathrm{R} = U_0 l/\nu$. Множитель $1/\sqrt{\mathrm{R}}$ введен затем, чтобы безразмерные переменные были все порядка 1, так что толщина пограничного слоя $\delta \sim l/\sqrt{\mathrm{R}}$, а $v_y/v_x \sim 1/\sqrt{\mathrm{R}}$. Уравнение непрерывности в безразмерных переменных сохранит свой вид. Второе уравнение системы запишется так:

$$\frac{1}{R}\left(v'_x \frac{\partial v'_y}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_y}{\partial y'}\right) = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 v'_y}{\partial x'^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 v'_y}{\partial y'^2}$$

Отсюда при $R \gg 1$ следует, что $\partial p'/\partial y' = 0$, т. е. давление в пограничном слое не зависит от расстояния до стенки (нет поперечного градиента давления). Наконец, третье уравнение системы (2.19) запишется в виде

$$v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2}$$

Последний член при $R \gg 1$ можно отбросить, и после этого получившееся уравнение числа Рейнольдса уже не содержит. Поскольку давление в пограничном слое не имеет поперечного градиента, оно равно давлению $p(x)$ в основном потоке жидкости (который предполагается потенциальным); пользуясь законом Бернулли, можно выразить

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -U\frac{\partial U}{\partial x}$$

где U – скорость основного потока (ее в задаче о пограничном слое надо считать заданной функцией от x). Полагая $U = U_0 U'$, имеем в безразмерных переменных $\frac{\partial p'}{\partial x'} = -U'\frac{\partial U'}{\partial x'}$, и уравнение пограничного слоя (уравнение Прандтля) принимает вид

$$v'_x \frac{\partial v'_{x'}}{\partial x} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} - \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} = U'\frac{\partial U'}{\partial x'} \tag{2.20}$$

с граничными условиями $v'_x = v'_y = 0$ на стенке и $v'_x \to U'$ при $y' \to \infty$. Решения этого уравнения уже не зависят от числа Рейнольдса. Это значит, что при изменении R вся картина течения в пограничном слое подвергается лишь преобразованию подобия, при котором продольные расстояния и скорости остаются неизменными, а поперечные меняются обратно пропорционально $\sqrt{\mathrm{R}}$. Возвращаясь к размерным переменным, можно записать уравнение Прандтля в виде

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = U\frac{dU}{dx} \tag{2.21}$$

Течение Блазиуса. Рассмотрим обтекание плоской полубесконечной бесконечно тонкой пластины плоско-параллельным потоком (течение Блазиуса). Пусть пластина совпадает с полуплоскостью xz, соответствующей $x > 0$, так что передним краем пластины является прямая $x = 0$. Скорость основного потока постоянна: $U = \text{const}$. Пишем систему уравнений пограничного слоя (уравнение Прандтля, дополненное уравнением непрерывности):

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\,, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Уравнение непрерывности можно сразу разрешить, введя функцию тока ψ:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}\,, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

В данной задаче нет никаких характерных размеров типа l. Будем искать функцию тока в виде

$$\psi = \sqrt{x\nu U} f(\xi), \quad \xi = y\sqrt{\frac{U}{x\nu}}$$

тогда

$$v_x = U f'(\xi), \quad v_y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}\left(\xi f'(\xi) - f(\xi)\right) \tag{2.22}$$

Отметим, что из такого вида v_x, еще до точного решения уравнений, можно сделать вывод, что толщина пограничного слоя ведет себя как $\delta \sim \sqrt{x\nu/U}$.

Подствив (2.22) в уравнение Прандтля, получим следующее уравнение для функции f:

$$f f'' + 2 f''' = 0 \tag{2.23}$$

с граничными условиями $f(0) = f'(0) = 0$, $f'(\infty) = 1$. Его можно решить только численно. При малых ξ

$$f(\xi) = \frac{1}{2}\alpha \xi^2 + O(\xi^5), \quad \alpha = 0,332.$$

3 Турбулентность

Все предыдущее рассмотрение относилось к ламинарным течениям, когда можно говорить о хорошо определенных линиях тока. В действительности ламинарные течения реализуются только при малых числах Рейнольдса, $\mathrm{R} < 45$. При $45 < \mathrm{R} < 5000$ характер течения качественно меняется. Например, при обтекании шара или цилиндра происходит отрыв струй с поверхности, и за обтекаемым телом образуется так называемая дорожка Кармана - длинная череда сносимых потоком вихрей. При $\mathrm{R} > 5000$ вихри становятся неустойчивыми, и за обтекаемым телом образуется турбулентный поток, в котором уже отсутствует всякая регулярность. Чем выше R, тем ближе начало турбулентной зоны к телу.

Причина турбулентности – в неустойчивости решений уравнения Навье-Стокса. При больших числах Рейнольдса стационарные решения становятся неустойчивыми, что приводит к нестационарному нерегулярному течению, которое и называется турбулентным. Неустойчивость означает, что сколь угодно малые возмущения стремятся возрасти со временем, и потому исходное точное решение уравнений движения фактически осуществиться не может. (Как, например, у ньютоновской частицы в потенциале $U(x) = -x^2$ формально есть состояние покоя при $x = 0$, но любое сколь угодно малое смещение выводит ее из этого состояния.) В идеальной жидкости ($\mathrm{R} = \infty$) все решения неустойчивы, и поэтому не имеют прямого физического смысла.

Процесс перехода от ламинарного течения к турбулентному очень сложен. В зависимости от условий эксперимента он может иметь различные особенности и промежуточные стадии. Добиваясь возможно меньших пульсаций скорости в налетающем потоке, можно задержать развитие турбулентности вплоть до $\mathrm{R} \sim 10^4 - 10^5$. Однако при увеличении числа Рейнольдса (возрастании скорости потока) рано или поздно неминуемо возникает турбулентный режим.

Из-за хаотического характера движения описание турбулентного течения с помощью поля скоростей невозможно. Компоненты скорости $v_i(\mathbf{x}, t)$ становятся случайными величинами. Тем не менее, поскольку макроскопически жидкость при этом все-таки куда-то течет, средние значения скорости (при усреднении по некоторому малому объему и/или промежутку времени) должны быть хорошо определены.

3.1 Статистическое описание турбулентности

В случае развитой турбулентности возможно статистическое описание процесса – в терминах средних значений и корреляционных функций. Рассмотрим идеализированную турбулентность – однородную и изотропную. Примем для простоты, что макроскопическое течение отстутствует (жидкость бурлит, оставаясь в целом на месте), т.е. значения скоростей $\mathbf{v}$ определяются некоторым стационарным случайным процессом. Для его корректного описания в уравнение Навье-Стокса вводят случайную силу $\mathbf{f}$ – стационарный случайный процесс, который приводит к стационарному случайному процессу для $\mathbf{v}$. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} \nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{f} \end{cases} \tag{3.1}$$

(будем сразу предполагать несжимаемость). Случайная сила $\mathbf{f}$ должна быть “роторного типа”, т.е. не представляться как градиент чего-либо, поскольку если, например, $\mathbf{f} = \nabla\varphi$, случайная функция φ устраняется переопределением давления. Статистические свойства вектор-функции $\mathbf{f}$ задаются средним $\Big\langle f_i(\mathbf{x}, t)\Big\rangle = 0$ и коррелятором

$$\Big\langle f_i(\mathbf{x}, t) f_j(\mathbf{y}, t')\Big\rangle = C_{ij}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)\delta(t - t') \tag{3.2}$$

Общий вид коррелятора скоростей в изотропном случае следующий:

$$\Big\langle v_i(\mathbf{x}, t) v_j(\mathbf{y}, t')\Big\rangle = D_{ij}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, t - t') \tag{3.3}$$

где $D_{ij}(r, t) = A(r, t)\delta_{ij} + B(r, t)x_i x_j$ (в несжимаемой жидкости между функциями A и B имеется связь).

Для того чтобы найти, как меняется во времени энергия жидкости $E = \frac{1}{2}\int v^2 d\Omega$, умножим второе уравнение в (3.1) скалярно на $\mathbf{v}$ и проинтегрируем по всему объему. Получим

$$\frac{dE}{dt} = \int \Big\langle f_i v_i \Big\rangle \, d\Omega - \nu \int \Big\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \Big\rangle \, d\Omega \tag{3.4}$$

Остальные члены обращаются в 0, т.к. сводятся (при учете $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) к граничным интегралам. Первый член в (3.4) называется накачкой (работа, производимой внешней силой в единицу времени), второй – диссипацией. В стационарном состоянии должно быть $dE/dt = 0$, т.е. накачка компенсируется диссипацией.

Проинтегрируем уравнение Навье-Стокса со случайной силой по малому промежутку времени от t до $t + \delta t$:

$$v_i(\mathbf{x}, t+\delta t) = v_i(\mathbf{x}, t)\mathbf{x}, t) + Q_i(\mathbf{x}, t)\delta t + \int_t^{t+\delta t} f_i(\mathbf{x}, s) ds + o(\delta t)$$

где

$$Q_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \nu \Delta v_i$$

Член со случайной силой написан в виде интеграла, поскольку (как обычно в теории случайных процессов) из-за частых флуктуаций f_i во времени формально он ведет себя как $\sim \sqrt{\delta t}$, а не $\sim \delta t$. В остальных членах возможно обычное разложение в ряд Тейлора. Напишем аналогичное разложение для $v_i(\mathbf{y}, t+\delta t)$ и перемножим их:

$$\begin{aligned}
& v_i(\mathbf{x}, t+\delta t) v_i(\mathbf{y}, t+\delta t) - v_i(\mathbf{x}, t) v_i(\mathbf{y}, t) \\
&= \Big(v_i(\mathbf{x}, t) Q_i(\mathbf{y}, t) + v_i(\mathbf{y}, t) Q_i(\mathbf{x}, t) \Big) \delta t \\
&+ \int_t^{t+\delta t} u_i(\mathbf{y}, t) f_i(\mathbf{x}, s) ds + \int_t^{t+\delta t} u_i(\mathbf{x}, t) f_i(\mathbf{y}, s) ds \\
&+ \int_t^{t+\delta t} \int_t^{t+\delta t} f_i(\mathbf{x}, s) f_i(\mathbf{y}, s') \, ds \, ds'
\end{aligned}$$

После взятия среднего имеем в левой части

$$\delta t \frac{\partial}{\partial t} \Big\langle v_i(\mathbf{x}, t+\delta t) v_i(\mathbf{y}, t+\delta t) \Big\rangle = 0$$

в силу стационарности процесса. Средние от однократных интегралов в правой части обращаются в нуль, а для среднего от двойного интеграла получим:

$$\int_t^{t+\delta t} \int_t^{t+\delta t} \Big\langle f_i(\mathbf{x}, s) f_i(\mathbf{y}, s') \Big\rangle \, ds \, ds' = \operatorname{tr} C(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \, \delta t, \qquad \operatorname{tr} C(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) := C_{ii}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$$

Получили соотношение

$$\Big\langle v_i(\mathbf{x}, t) Q_i(\mathbf{y}, t) + v_i(\mathbf{y}, t) Q_i(\mathbf{x}, t) \Big\rangle + \operatorname{tr} C(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = 0 \tag{3.5}$$

которое надо дальше преобразовывать с учетом бездивергентности поля $\mathbf{v}$, подставив выражение для Q_i.

Для краткости будем обозначать частную производную по i-й координате символом ∂_i. Во-первых, имеем

$$\Big\langle v_i(\mathbf{x})\partial_i p(\mathbf{y})\Big\rangle = -\Big\langle p(\mathbf{y})\partial_i v_i(\mathbf{x})\Big\rangle = 0$$

(первое равенство следует из того, что корреляционная функция зависит только от разности $\mathbf{x}-\mathbf{y}$, а второе – из бездивергентности). Аналогично,

$$\nu\Big\langle v_i(\mathbf{x})\Delta v_i(\mathbf{y})\Big\rangle = -\nu\Big\langle \partial_i v_j(\mathbf{x})\partial_j v_i(\mathbf{y})\Big\rangle$$

Остались члены третьей степени по скоростям:

$$\begin{aligned}
&\Big\langle v_i(\mathbf{y})v_j(\mathbf{x})\partial_j v_i(\mathbf{x}) + v_i(\mathbf{x})v_j(\mathbf{y})\partial_j v_i(\mathbf{y})\Big\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j}\Big\langle v_i(\mathbf{y})v_j(\mathbf{x})v_i(\mathbf{x})\Big\rangle + \frac{\partial}{\partial y_j}\Big\langle v_i(\mathbf{x})v_j(\mathbf{y})v_i(\mathbf{y})\Big\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j}\Big\langle v_i(\mathbf{y})v_j(\mathbf{x})v_i(\mathbf{x})\Big\rangle - \frac{\partial}{\partial x_j}\Big\langle v_i(\mathbf{x})v_j(\mathbf{y})v_i(\mathbf{y})\Big\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j}\Big\langle v_i(\mathbf{x})v_i(\mathbf{y})(v_j(\mathbf{x})-v_j(\mathbf{y}))\Big\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big\langle |\mathbf{v}(\mathbf{x})-\mathbf{v}(\mathbf{y})|^2(v_j(\mathbf{x})-v_j(\mathbf{y}))\Big\rangle + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\Big\langle v_j(\mathbf{x})v^2(\mathbf{y})-v_j(\mathbf{y})v^2(\mathbf{x})\Big\rangle}_{=0}
\end{aligned}$$

Тем самым соотношение (3.5) принимает вид

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big\langle |\mathbf{v}(\mathbf{x})-\mathbf{v}(\mathbf{y})|^2(v_j(\mathbf{x})-v_j(\mathbf{y}))\Big\rangle = 2\nu\Big\langle \partial_i v_j(\mathbf{x})\partial_j v_i(\mathbf{y})\Big\rangle - \operatorname{tr} C(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \tag{3.6}$$

Если в (3.6) устремить $\mathbf{y}\to\mathbf{x}$ при $\nu\neq 0$, получим соотношение

$$\nu\Big\langle \partial_i v_j(\mathbf{x})\partial_j v_i(\mathbf{x})\Big\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{tr} C(0) \tag{3.7}$$

которое выражает баланс диссипации и накачки. Если же сначала взять предел $\nu\to 0$, получим

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big\langle |\mathbf{v}(\mathbf{x})-\mathbf{v}(\mathbf{y})|^2(v_j(\mathbf{x})-v_j(\mathbf{y}))\Big\rangle = 2\operatorname{tr} C(0) \tag{3.8}$$

Список литературы

[1] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теоретическая физика т. VI, Гидродинамика, М., Наука, 1986.

[2] Г. Лэмб, Гидродинамика, М., Гостехиздат, 1947.

[3] Г. Фалькович, Современная гидродинамика: краткий курс, Регулярная и хаотическая динамика, 2014.