

Дискретная математика
Семинар 14
ВШЭ, факультет математики
первый курс, четвёртый модуль

Напомним, что цикловый индекс подгруппы $G \subset S_n$ равен многочлену $Z_G(y_1, y_2, \dots) = \frac{1}{|G|} \sum h_{b_1, b_2, \dots} y_1^{b_1} y_2^{b_2} \dots$, где $h_{b_1, b_2, \dots}$ равно числу элементов $g \in G$ циклового типа (b_1, b_2, \dots) .

0. Найдите явно числа $h_{b_1, b_2, \dots}$ для группы S_n .
1. Найдите цикловый тип для группы S_4 , содержащий наибольшее число перестановок.
2. Вычислите цикловый индекс групп S_3 и S_4 .
3. Вычислите цикловый индекс групп A_3 и A_4 .
4. Докажите, что $Z_{A_n}(y_1, y_2, \dots) = Z_{S_n}(y_1, y_2, \dots) + Z_{S_n}(y_1, -y_2, y_3, -y_4, \dots)$.
5. Докажите, что $nZ_{S_n} = \sum_{k \geq 1} y_k Z_{S_{n-k}}$.
6. Вычислите цикловый индекс циклической группы C_n .
7. Докажите формулу для циклового индекса диэдральной группы D_n :

$$Z_{D_n} = \frac{1}{2} Z_{C_n} + \begin{cases} \frac{1}{2} y_1 y_2^{(n-1)/2}, & \text{если } n \text{ нечётное,} \\ \frac{1}{4} (y_2^{n/2} + y_1^2 y_2^{(n-2)/2}), & \text{если } n \text{ чётное.} \end{cases}$$

8. Постройте две неизоморфные группы с одинаковым цикловым индексом.