АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ - листок 5

Прием задач в нестандартное время: четверг 30.04 в 14.00!

Листок по мотивам контрольной 2013 года плюс еще пара задач.

1 Опишите группу Пикара дополнения к неприводимой гиперповерхности степени d в проективном пространстве.

2 Опишите пространство всех квартик (т.е. гиперповерхностей степени 4) в $\mathbb{P}^3$, содержащих фиксированную прямую $l \subset \mathbb{P}^3$, как проективизацию пространства глобальных сечений некоторого когерентного пучка на $\mathbb{P}^3$. Какова размерность этого пространства?

3 Докажите, что квартики в $\mathbb{P}^3$, содержащие (какую-нибудь) прямую, образуют дивизор в пространстве всех квартик. А верно ли то же самое для квартик, содержащих конику?

4 Пусть C кривая в $\mathbb{P}^3$, являющаяся (схемным) пересечением поверхностей степени m и n в $\mathbb{P}^3 = Proj(S)$, $S = k[X_0, \ldots, X_3]$. Напишите короткую точную последовательность, где справа стоит идеал C, а в центре и слева - прямые суммы S со сдвигами градуировки. Напишите соответствующую точную последовательность пучков.

5 Положив $m = 2, n = 2$ в предыдущей задаче, посчитайте размерность пространства квинтик, содержащих C.

6 Пусть X нетерова отделимая схема. Покажите, что существует такое целое число d, что для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на X имеем $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ для всех $i > d$.

7 Пусть теперь X проективна, так что любой когерентный пучок - фактор локально свободного пучка конечного ранга (напомните, почему это верно). Пусть d такое, что для всех $i > d$ и для всех локально свободных $\mathcal{G}$ имеем $H^i(X, \mathcal{G}) = 0$. Покажите, что и для произвольного когерентного пучка $\mathcal{F}$, $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ для всех $i > d$.

8 Пусть X — проективная схема над кольцом A и $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \ldots \to \mathcal{F}_k$ — длинная точная последовательность пучков на X. Покажите, что существует такое n_0, что для всех $n > n_0$ последовательность $H^0(X, \mathcal{F}_1(n)) \to H^0(X, \mathcal{F}_2(n)) \to \ldots \to H^0(X, \mathcal{F}_k(n))$ также точна.

9 Покажите, что гладкая рациональная кривая степени 4 в $\mathbb{CP}^3$ содержится в единственной квадрике, причем обязательно неособой.

10 Вспомнив, что такая квадрика изоморфна $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, найдите степени проекций такой кривой на сомножители.