Дифсистемы 2015, 4 модуль
Записки к лекции 4

Напоминание: Любая фундаментальная матрица системы регулярной в $z=0$ имеет вид $Y(z) = U(z) z^{\Lambda} z^{E}$, где E - нормализованный логарифм монодромии, Λ - диагональная целочисленная, $U(z)$ - голоморфная в окрестности нуля. (Аналогично для скалярного уравнения)

Напоминание прошлой лекции: Среди всех фундаментальных матриц (базисов пространства решений) есть особенно хорошие и удобные (пока не сказано чем именно) со следующими ~~[illegible]~~ дополнительными свойствами:

E - блочно-диагональна, (блоки по корневым подпространствам монодромии) все блоки верхнетреугольны

Λ разбивается на блоки того же размера что и E, и внутри каждого блока числа на диагонали не убывают

U всё так же голоморфна.

Такие фундаментальные матрицы (базисы) называются левелевскими (Levelt)

На этой лекции будем получать многочисленные следствия из простого существования таких базисов.

2)

Утв: $z=0$ фуксова особ. точка $\Leftrightarrow$ в левелевской базисе $U(z)$ голоморфно обратима

Д-во: $\Leftarrow$ (Достаточность)

$$Y(z) = U(z) z^{\Lambda} z^{E}, \quad Y^{-1}(z) = z^{-E} z^{-\Lambda} U^{-1}(z)$$

$$Y'(z) = U'(z) z^{\Lambda} z^{E} + U(z) \Lambda \frac{z^{\Lambda}}{z} \cdot z^{E} + U(z) z^{\Lambda} \cdot E \cdot \frac{z^{E}}{z}$$

$$Y'(z) = B(z) Y \Rightarrow B(z) = Y' \cdot Y^{-1}$$

$$\Rightarrow B(z) = U'(z) U^{-1}(z) + U(z) \frac{\Lambda + z^{\Lambda} E z^{-\Lambda}}{z} U^{-1}(z)$$

*/ В лев. базисе $z^{\Lambda} E z^{-\Lambda}$ голоморфна

т.к. $z^{\begin{pmatrix} \varphi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi_n \end{pmatrix}} \cdot E \cdot z^{\begin{pmatrix} -\varphi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -\varphi_n \end{pmatrix}} \sim E_{ij} \cdot z^{\varphi_i - \varphi_j}$

E - верхнетреугольна, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ не убывают

$\Rightarrow E_{ij} z^{\varphi_i - \varphi_j}$ голоморфна

Итак: $$B(z) = \underbrace{U'(z) U^{-1}(z)}_{\text{голом.}} + \underbrace{U(z)}_{\text{голом}} \underbrace{\frac{\Lambda + z^{\Lambda} E z^{-\Lambda}}{z}}_{\text{полюс 1 порядка}} \underbrace{U^{-1}(z)}_{\text{голом}}$$

$\Rightarrow B(z)$ имеет внутри полюс первого порядка.

Вычет: $$\lim_{z \to 0} z \cdot B(z) = U(0) \frac{\Lambda + \lim_{z \to 0} z^{\Lambda} E z^{-\Lambda}}{1} U^{-1}(0)$$

$\Rightarrow$ (Необходимость) В эту сторону не пользуемся. Используется несложная но изощрённая и [redacted] и объёмная линейная алгебра. Прочитать можно в Бомбруже

Замечание $\operatorname{diag}(\lim_{z\to 0} z^{\Lambda} E z^{-\Lambda}) = \operatorname{diag}(z^{\Lambda} E z^{-\Lambda}) =$
$= \operatorname{diag} E$

Определение Числа, стоящие на диагонали $\Lambda + E$ (в левелевском базисе) называются показателями системы в особой точке $z=0$.

Следствие: собственные значения вычета коэффициентов системы в нуле совпадают с показателями системы в нуле

Определение: Система нерезонансна в нуле если никакие её два показателя не отличаются на натуральное (не целое!) число (показателя в нуле).

Замечание: Нет резонанса $\Rightarrow$
$$[\Lambda, E] = 0 \text{ и } z^{\Lambda} E z^{-\Lambda} \equiv E$$

Следствие: Система нерезонансна в нуле $\Rightarrow$ её матрица монодромии сопряжена экспоненте вычета
$$G_0 \sim \exp(2\pi i B_0)$$

Д-во: $B_0 = \operatorname{res}_{z=0} B(z) = \lim_{z\to 0} U(z)(\Lambda + z^{\Lambda} E z^{-\Lambda}) U^{-1}(z) =$
$$= U(0)(\Lambda + E) U^{-1}(0)$$
$$e^{2\pi i B_0} = U_0 e^{2\pi i \Lambda} \cdot e^{2\pi i E} U^{-1}(0) = U(0) G_0 U^{-1}(0)$$

4) ~~[illegible]~~

<u>Пример</u>: $Y(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B(z) = \begin{pmatrix} 1/z & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ при резонансе следствие не верно

<u>Следствие</u>: Если точка нерезонансная, то вблизи бесс в которой монодромия имеет жордановы блоки будет невелевским

<u>Глобальный анализ</u>: Пусть система

$y' = B(z)y$ регулярна на $\mathbb{CP}^1$, имеет особые точки $\{a_1, \dots a_n\}$ и в них показатели $\{\beta_i^j\}$

<u>Утв</u>: Для регулярной системы $\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \beta_i^j$ целое неположительное число. Система фуксова на $\mathbb{CP}^1 \Leftrightarrow \Sigma = 0$

<u>Д-во</u>: */Формула Лиувилля-Остроградского

$Y' = B(z)Y \Rightarrow (\det Y)' = \operatorname{tr} B(z) \cdot \det Y$

<u>Д-во</u>: $(\det Y)' = \left| \begin{matrix} \text{—} \\ \text{—} \\ \vdots \\ \text{—} \end{matrix} \right|' = \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ p \end{matrix} \right|' + \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ p \end{matrix} \right|' + \dots + \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ p \end{matrix} \right|' =$

$k' = (b_{k1}(z), \dots b_{kp}(z)) \cdot Y =$

$= b_{k1} \, 1 + b_{k2} \, 2 + \dots + b_{kp} \, p$

$= \left| \begin{matrix} b_{11} \, 1 \\ 2 \\ \vdots \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} 1 \\ b_{22} \, 2 \\ \vdots \end{matrix} \right| + \dots =$

$= \operatorname{tr} B \left| \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ p \end{matrix} \right|$

~~[illegible]~~ $\Rightarrow d \ln \det Y = \operatorname{tr} B(z) dz$

$\det Y = \exp\left(\int \operatorname{tr} B(z) dz\right) \cdot C_0$

(продолжение док-ва).

Итак, $d \ln \det Y = \operatorname{tr} B(z)\,dz$

Локально в окрестности особой точки $z = a_i$

$$\det Y = h(z)\cdot(z-a_i)^{k_i}(z-a_i)^{\sum_j \beta_i^j}$$

β_i^j - показатели в a_i, k_i - порядок нуля определителя $U(z)$ в левелевском разложении $\Rightarrow k_i \geq 0$

$$\Rightarrow \operatorname{res}_{a_i} \operatorname{tr} B(z)\,dz = \operatorname{res}_{a_i} d\ln\det Y = k_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_i^j$$

Но $\omega = \operatorname{tr} B(z)\,dz$ 1-форма на $\mathbb{C}P^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ сумма её вычетов равна нулю

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \beta_i^j = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Sigma = -\sum k_i$ - целое неположительное

$\Sigma = 0 \Leftrightarrow k_i = 0\ \forall i \Leftrightarrow U_i(z)$ гол. обр. в a_i

$\Leftrightarrow$ система Фуксова.

<u>Замечание</u>: $d(\ln(\det Y)) = d(\ln(\det(YC)))$

$\Rightarrow$ можно считать Y левелевским при рассмотрении точки $z = a_i$