Многообразия Фробениуса-Дубровина

С.М Натанзон

Contents

1. Фробениусовы пары

Определение 1.1. *Фробениусовой парой назовем пару (A, g), где:*

1) A – коммутативная ассоциативная конечномерная алгебра с единицей $e \in A$ над полем $\mathbb{K}$.

2) $g : A \times A \to \mathbb{K}$ – симметрическая невырожденная билинейная форма такая, что $g(a, b \cdot c) = g(a \cdot b, c)$.

Эта билинейная форма порождает линейную форму $\theta(a) = g(a, e)$.

Задача 1.1. *Пусть A – коммутативная ассоциативная алгебра с единицей и $\theta \in A^*$ – линейная форма. Тогда билинейная форма $g(a, b) = \theta(a \cdot b)$ невырождена, если и только если $Ker(\theta)$ не содержит идеалов A. В этом случае (A, g) образует фробениусову пару.*

Таким образом, можно считать, что фробениусова пара — это пара (A, θ), где A — коммутативная ассоциативная конечномерная алгебра с единицей и $\theta : A \to K$ — линейная форма такая, что $\mathrm{Ker}(\theta)$ не содержит идеалов A.

Если существует фробениусова пара вида (A, θ), то алгебра A является фробениусовой, то есть ее правые и левые регулярные представления эквивалентны [15].

Пример 1.1. *(Фробениус). Пусть G —конечная абелева группа. Рассмотрим ее групповую алгебру*

$$A = \mathbb{K}[G] = \{a = \sum_i \alpha_i g_i | \alpha_i \in \mathbb{K}, g_i \in G\}.$$

Положим $\theta(\sum_i \alpha_i g_i) = \alpha_0$, где g_0 — единица группы G.

Пример 1.2. *Пусть Ω — конечное множество и μ — мера на Ω. Рассмотрим множество*
$$A = \{f : \Omega \to \mathbb{K}\}$$
всех функций на Ω. Положим $\theta(f) = \int_\Omega f d\mu$.

Пример 1.3. *Пусть X — гладкое компактное многообразие и $dim X = 2n$. Рассмотрим четные когомологии де Рама $A = H^{ev}(X, \mathbb{C})$ с операцией $a \cdot b = a \wedge b$. Для $a = \sum_i a_i$, где $a_i \in H^{2i}(X, \mathbb{C})$, положим $\theta(a) = \int_X a_n$.*

Пример 1.4. *Рассмотрим пространство $A = \mathbb{K}^n$ с операцией*
$$(a_1, ..., a_n) \cdot (b_1, ..., b_n) = (a_1 b_1, ..., a_n b_n)$$
(т.е. A — алгебра диагональных матриц). Рассмотрим множество $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $\lambda_i \neq 0$ $(i = 1, ..., n)$, и положим
$$\theta(a_1, ..., a_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i.$$

Задача 1.2. *Доказать, что пары (A, θ) из примеров 1.1-1.4 являются фробениусовыми парами.*

Пусть (A, θ) – фробениусова пара и A^* - двойственное пространство. Тогда
$$\theta \in A^*, g \in A^* \bigotimes A^* = \mathrm{Hom}(A, A^*) \text{ и } g^{-1} \in \mathrm{Hom}(A^*, A).$$
Рассмотрим трилинейную форму
$$c \in A^* \otimes A^* \otimes A^* = \mathrm{Hom}(A \otimes A, A^*),$$
где
$$c(a, b, d) = c(a \otimes b \otimes d) = \theta(a \cdot b \cdot d).$$
Тогда
$$g^{-1} c \in \mathrm{Hom}(A \otimes A, A).$$

Лемма 1.1. *$a \cdot b = g^{-1} c(a \otimes b)$.*

Proof. Для $a \in A, \ell \in A^*$ положим $\langle a, \ell \rangle = \ell(a)$. Тогда для каждого $x^* \subset A^*$
$$\langle a \cdot b, x^* \rangle = g(a \cdot b, g^{-1}(x^*)) = \theta(a \cdot b \cdot g^{-1}(x^*)) = c(a \otimes b \otimes g^{-1}(x^*)) =$$
$$= \langle c(a \otimes b), g^{-1}(x^*) \rangle = \langle g^{-1} c(a \otimes b), x^* \rangle.$$
Следовательно, $a \cdot b = g^{-1} c(a \otimes b)$. □

Таким образом, фробениусова пара — этот конечномерное векторное пространство с заданными на нем линейной, билинейной и трилинейной формами со специальными свойствами. Это соображение вместе с топологическими аргументами позволяет доказать [4], что категория фробениусовых пар изоморфна категории $2D$ топологических теорий поля в смысле [2]. Более общим $2D$ топологическим теориям поля отвечают уже некоммутативные фробениусовы пары [1].

Далее мы считаем, что $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ Для каждого $a \in A$ рассмотрим $\ell_a \in \mathrm{Hom}(A, A)$, где $\ell_a(x) = a \cdot x$.

Лемма 1.2. *Пусть A — ассоциативная коммутативная алгебра с единицей. Тогда соответствие $a \mapsto \ell_a$ порождает точное представление алгебры.*

Proof.
$$\ell_{\lambda a+\mu b}(x)=(\lambda a+\mu b)x=(\lambda\ell_a+\mu\ell_b)(x)\cdot\ell_{ab}(x)=abx=(\ell_a\cdot\ell_b)(x).$$
Пусть $\ell_a(A)=0$, тогда $a=\ell_a e=0$. □

Определение 1.2. *Элемент $a\in A$ называется полупростым, если оператор $\ell_a\in Hom(A,A)$ диагонализуем. Алгебра называется полупростой, если все ее элементы полупросты. Фробениусова пара (A,θ) называется полупростой, если A полупроста.*

Задача 1.3. *Доказать, что алгебра A полупроста, если и только если $a^m\neq 0$ для всех $a\in A, a\neq 0, m>0$.*

Задача 1.4. *Доказать, что алгебры из примеров 1.1, 1.2,1.4 полупросты, а из примера 1.3 нет.*

Лемма 1.3. *Пусть A — коммутативная ассоциативная полупростая конечномерная алгебра. Тогда существует $a\in A$ такой, что каждое собственное подпространство оператора ℓ_a одномерно и инвариантно относительно оператора ℓ_b для всех $b\in A$.*

Proof. Выберем $a\in A$ так, чтобы оператор ℓ_a имел максимальное число m различных собственных значений. Пусть $\mu_1,...,\mu_m$ — собственные значения оператора ℓ_a и A_i — собственные подпространства, отвечающие μ_i. Рассмотрим $b\in A, h\in A_i$ и $f=\ell_b h$. Тогда $\ell_a f=\ell_a\ell_b h=\ell_b\ell_a h=\mu_i\ell_b h=\mu_i f$ и, следовательно, $\ell_b A_i\subset A_i$.

Оператор $\ell_{a+\lambda b}$ имеет не более m собственных значений, причем при малых λ эти собственные значения лежат вблизи $\{\mu_1,...,\mu_m\}$ и, следовательно, попарно различны. Таким образом ограничения операторов $\ell_{a+\lambda b}$ на A_i имеют лишь 1 собственное значение. Следовательно, оператор ℓ_b также имеет лишь одно собственное значение на A_i. Таким образом, $\ell_b(c)=\varepsilon_i^b c$ для всех $c\in A_i$. Числа, $\varepsilon_1^b,...,\varepsilon_m^b$ определяют оператор ℓ_b и, в частности, $\dim\{\ell_b\mid b\in A\}\leq m$.

С другой стороны, согласно лемме 1.2, $\dim A=\dim\{\ell_b\mid b\in A\}$, откуда $\sum_{i=1}^m\dim A_i=\dim A=\dim\{\ell_b\mid b\in A\}\leq m$ и следовательно $\dim A_i=1$ для всех i. □

Определение 1.3. *Пусть (A,θ_A) и (B,θ_B) — две фробениусовы пары. Изоморфизм $\varphi:A\to B$ называется изоморфизмом фробениусовых пар, если $\theta_B(\varphi(a))=\theta_A(a)$ при $a\in A$.*

Теорема 1.1. *Каждая полупростая фробениусова пара изоморфна паре из примера 1.4, то есть $(\mathbb{K}^n,\theta)$.*

Proof. Пусть (A,θ_A) — полупростая фробениусова пара. Согласно лемме 1.3 она имеет базис $f_1,...,f_n$ такой, что $b\cdot f_i=\ell_b f_i=\varepsilon_i^b f_i$ для каждого $b\in A$. Это дает гомоморфизм
$$\varphi:A\to\mathbb{C}^n,\ \text{ где }\ \varphi(b)=(\varepsilon_1^b,...,\varepsilon_n^b).$$
Согласно лемме 1.2 φ —мономорфизм и, следовательно, изоморфизм, поскольку $\dim A=n$. Положим $\theta(x)=\theta_A(\varphi^{-1}(x))$ для $x\in\mathbb{C}^n$. Тогда $\mathrm{Ker}\ \theta=\varphi(\mathrm{Ker}\ \theta_A)$ не содержит идеалов алгебры $\mathbb{C}^n$. Следовательно,
$$\theta(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)=\sum_{i=1}^n\lambda_i\varepsilon_i,$$

где $\lambda_i \neq 0$ для всех i. Таким образом, φ порождает изоморфизм пар (A, θ_A) и $(\mathbb{C}^n, \theta)$. $\square$

Определение 1.4. *Базис $X_1, ..., X_n \in A$ полупростой фробениусовой алгебры A называется каноническим, если $X_i \cdot X_i = X_i$ и $X_i \cdot X_j = 0$ при $i \neq j$.*

Задача 1.5. *Пусть $X_1, ..., X_n$ — канонический базис полупростой фробениусовой алгебры A и (A, θ) — фробениусова пара. Пусть $\mu_i = \theta(X_i)$ и $\eta^1, ..., \eta^n \in A^*$ — двойственный базис ($\eta^i(X_j) = \delta^i_j$). Тогда $e = \sum_{i=1}^n X_i,\ \theta = \sum_{i=1}^n \mu_i \eta^i,\ g = \sum_{i=1}^n \mu_i \eta^i \otimes \eta^i,\ c = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot \eta^i \otimes \eta^i \otimes \eta^i$.*

Теорема 1.2. *У каждой полупростой фробениусовой алгебры A есть канонический базис. Этот базис единствен с точностью до перестановки.*

Proof. Согласно теореме 1.1 можно считать, что $A = \mathbb{K}^n$, где $(\mathbb{K}^n \theta)$ — пара из примера 1.4. Алгебра $\mathbb{K}^n$ имеет канонический базис $x_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$. Пусть $y_1, ..., y_n$ — другой канонический базис алгебры $\mathbb{K}^n$. Тогда $x_i = \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} y_j$ и $y_k = \sum_{j=1}^n \xi_{kj} x_j$. Таким образом,

$$\xi_{ki} x_i = (\sum_{j=1}^n \xi_{kj} x_j) x_i = y_k x_i = y_k (\sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} y_j) = \varepsilon_{ik} y_k.$$

Следовательно, если $\varepsilon_{ik} \neq 0$ и $\omega_{ki} = \frac{\xi_{ki}}{\varepsilon_{ik}}$, то $y_k = \omega_{ki} x_i = \omega_{ki} x_i^2 = \omega_{ki}^{-1} (\omega_{ki} x_i)^2 = \omega_{ki}^{-1} y_k^2 = \omega_{ki}^{-1} y_k = x_i$. $\square$

2. Структуры Дубровина: определение и два примера

Определение 2.1. *Пусть M — гладкое вещественное или комплексное многообразие. Структурой Дубровина на M называется структура полупростой фробениусовой пары (M_p, θ_p) на касательном пространстве $M_p = T_p M$ каждой точки $p \in M$ такая, что*

1) Тензоры $\theta = \{\theta_p | p \in M\}$, $g(a, b) = \theta(a \cdot b)$, $c(a, b, d) = \theta(a \cdot b \cdot d)$ гладкие и $d\theta = 0$.

2) Метрика g порождает плоскую связность ∇ такую, что $\nabla e = 0$, где e — поле единиц.

3) Существует покрытие $M \bigcup_\alpha U_\alpha$ координатными картами

$$(x^1_\alpha, ..., x^n_\alpha) : U_\alpha \to \mathbb{K}^n$$

такое, что $(\partial/\partial x^1_\alpha, ..., \partial/\partial x^n_\alpha)$ образуют канонический базис M_p при каждом $p \in U$.

4) Эйлерово поле $E = \sum_{i=1}^n x^i_\alpha (\partial/\partial x^i_\alpha)$ не зависит от α, причем $\nabla\nabla E = 0$ и $L_E \theta = (m+1)\theta$, где L_E — производная Ли по полю E.

Пример 2.1. *Пусть $M = \mathbb{R}^n = \{(x^1, ..., x^n) | x^i \in \mathbb{R}\}$. Координаты $(x^1, ..., x^n)$ порождают дифференциальные формы dx^i и векторные поля $\partial/\partial x^i$. Зададим на M_p структуру алгебры, положив*

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} = \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Тогда $e = \sum_{i=1}^n (\partial/\partial x^i), \theta = \sum_{i=1}^n dx^i,\ g = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i,\ c = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i \otimes dx^i$ и $L_E = \theta$. Таким образом, эта структура является структурой Дубровина.

Пример 2.2. *Пусть* $\widetilde{M} = \widetilde{M}^n$ *— пространство всех многочленов вида*

$$p(z) = z^{n+1} + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n, \quad a_i \in \mathbb{C}.$$

(Это пространство известно в теории особенностей как пространство версальных деформаций особенности A_n*.)*

Пусть $p = p(z) \in \widetilde{M}$, $v \in \widetilde{M}_p$ *и* $p_v(z,s) = z^{n+1} + a_1(s) z^{n-1} + ... + a_n(s)$ *— кривая в множестве* $\widetilde{M}$, *отвечающая касательному вектору* v *и такая, что* $p_v(z,0) = p(z)$. *Положим*

$$\dot{a}_i = \frac{da_i(s)}{ds}|_{s=o} \quad \text{и} \quad \dot{p}_v(z) = \frac{\partial p_v(z,s)}{\partial s}|_{s=0} = \dot{a}_1 z^{n-1} +, ..., +\dot{a}_n.$$

Соответствие $v \mapsto \dot{p_v}$ *порождает изоморфизм*

$$\varphi_p : \widetilde{M}_p \to Q_{n-1} = \{b_1 z^{n-1} + ... + b_n \mid b_i \in \mathbb{C}\}$$

на пространство Q_{n-1} *многочленов степени* $n-1$.

Рассмотрим также многочлен $p'(z) = (n+1)z^n + ... + a_{n-1}$. *Рассмотрим операцию* $*_p : \widetilde{M}_p \times \widetilde{M}_p \to \widetilde{M}_p$, *где*

$$v_1 *_p v_2 = \varphi_p^{-1}(\varphi_p(v_1) \cdot \varphi_p(v_2) \pmod{p'}).$$

Она однозначно определяется равенством

$$\varphi_p(v_1 *_p v_2) = \varphi_p(v_1) \cdot \varphi_p(v_2) - f p',$$

где f *— единственный многочлен такой, что* $\varphi_p(v_1) \cdot \varphi_p(v_2) - f \cdot p' \in Q_{n-1}$.

Положим также

$$\theta_p(v) = -\operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{\varphi_p(v)}{p'(z)} dz, \ \theta = \{\theta_p | p \in \widetilde{M}\} \text{ и } g(a,b) = \theta(a \cdot b).$$

Задача 2.1. *Умножение* $*_p$ *и линейная форма* θ_p *порождают на* $\widetilde{M}_p$ *структуру фробениусовой пары с единицей* $e = \varphi^{-1}(1)$. *Алгебра* $\widetilde{M}_p$ *полупроста, если и только если корни многочлена* $p'(z)$ *попарно различны.*

Пусть $M = M^n \subset \widetilde{M}^n$ — подмножество таких $p \subset \widetilde{M}^n$, что корни $\alpha_1, ..., \alpha_n$ многочлена $p'(z)$ попарно различны. Для $p \in M$ положим $x^i = x^i(p) = p(\alpha_i)$. Функции x^i образуют координаты в окрестности $U \subset M$ точки p. Далее в этом параграфе мы считаем, что $p \in U \subset M$.

Лемма 2.1. *Векторы* $(\partial/\partial x^1, ..., \partial/\partial x^n)$ *образуют канонический базис в* M_p,

$$\frac{\partial p}{\partial x^j} = \prod_{i \neq j} \frac{(z - \alpha_i)}{(\alpha_j - \alpha_i)},$$

и

$$\theta = \frac{da_1}{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \mu_j dx^j,$$

где

$$\mu_j = \frac{1}{n+1} \prod_{i \neq j} \frac{1}{\alpha_j - \alpha_i} = \frac{1}{n+1} \frac{\partial a_1}{\partial x^j}.$$

Proof.

$$\delta_{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \frac{\partial p(\alpha_i)}{\partial x^j} = \frac{\partial((\alpha_i)^{n+1} + a_1(\alpha_i)^{n-1} + ... + a_n)}{\partial x^j} =$$

$$((n+1)(\alpha_i)^n + (n-1)a_1(\alpha_i)^{n-2} + ... + a_{n-1})\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} + \frac{\partial a_1}{\partial x^j}(\alpha_i)^{n-1} + ... + \frac{\partial a_n}{\partial x^j} =$$

$$p'(\alpha_i)\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} + \frac{\partial p}{\partial x^j}(\alpha_i) = \frac{\partial p}{\partial x^j}(\alpha_i).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial p}{\partial x^j}(\alpha_i) = \delta_{ij}$$

и

$$\frac{\partial p}{\partial x^j} = \prod_{i \neq j} \frac{(z-\alpha_i)}{(\alpha_j - \alpha_i)} = (\prod_{i \neq j} \frac{1}{\alpha_j - \alpha_i})z^{n-1} + A_1 z^{n-2} + ... + A_{n-1}.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial p}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}(z^{n+1} + a_1 z^{n-1} + ... + a_n) = \frac{\partial a_1}{\partial x^j} z^{n-1} + ... + \frac{\partial a_n}{\partial x^j}.$$

Таким образом,

$$\prod_{i \neq j} \frac{1}{\alpha_j - \alpha_i} = \frac{\partial a_1}{\partial x^j}.$$

По определению $\varphi_p(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial p}{\partial x^i}$ и, следовательно, векторы $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ образуют канонический базис алгебры M_p, если и только если

$$\frac{\partial p}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial p}{\partial x^k} = \delta_{jk}\frac{\partial p}{\partial x^j} - fp',$$

где f — некоторый многочлен.

Пусть $j \neq k$. Тогда

$$\frac{\partial p}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial p}{\partial x^k} = \prod_{i \neq j} \frac{(z-\alpha_i)}{(\alpha_j - \alpha_i)} \prod_{i \neq k} \frac{(z-\alpha_i)}{(\alpha_k - \alpha_i)} = \prod_{i=1}^{n}(z-\alpha_i) \cdot \widetilde{f} = p'f,$$

где f — многочлен. Кроме того,

$$(\frac{\partial p}{\partial x^j} - 1)(\alpha_j) = \prod_{i \neq j} \frac{\alpha_j - \alpha_i}{\alpha_j - \alpha_i} - 1 = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial p}{\partial x^j} - 1 = (z - \alpha_j) \cdot \psi$$

и

$$\frac{\partial p}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial p}{\partial x^j} - \frac{\partial p}{\partial x^j} = \frac{\partial p}{\partial x^j}(\frac{\partial p}{\partial x^j} - 1) = \prod_{i \neq j} \frac{(z-\alpha_i)}{(\alpha_j - \alpha_i)}(z-\alpha_j)\psi =$$

$$\prod_{i=1}^{n}(z-\alpha_i) \cdot \widetilde{f} = p' \cdot f,$$

где f и ψ — многочлены. Таким образом,

$$(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n})$$

образуют канонический базис в M_P.

Определим μ_i равенством $\theta = \sum_{i=1}^n \mu_j dx^j$. Тогда

$$\mu_j = \theta(\frac{\partial}{\partial x^j}) = -\mathrm{Res}_{z=\infty}\frac{\partial p/\partial x^j}{p'}dz = \sum_{k=1}^n \mathrm{Res}_{z=\alpha_k}\frac{\partial p/\partial x^j}{p'}dz =$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathrm{Res}_{z=\alpha_k}\frac{\prod_{i\neq j}\frac{z-\alpha_i}{\alpha_j-\alpha_i}dz}{(n+1)\prod_{i=1}^n(z-\alpha_i)} = \sum_{k=1}^n \mathrm{Res}_{z=\alpha_k}\frac{dz}{(n+1)(z-\alpha_j)\prod_{i\neq j}(\alpha_j-\alpha_i)} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)\prod_{i\neq j}(\alpha_j-\alpha_i)} = \frac{1}{n+1}\frac{\partial a_1}{\partial x^j}.$$

$\square$

Лемма 2.2. *Пусть* $E = \sum_{i=1}^n x^i(\partial/\partial x^i)$. *Тогда* $L_E\theta = \frac{2}{n+1}\theta$.

Proof. Многочлены $L_E p$ и $p - \frac{z}{n+1}p'$ имеют одинаковые степени $n-1$ и совпадают в точках $\alpha_1, ..., \alpha_n$, поскольку согласно лемме 2.1

$$L_E(p)(\alpha_k) = \sum_{j=1}^n x^j \frac{\partial p}{\partial x^j}(\alpha_k) = \sum_{j=1}^n x^j \prod_{i\neq j}\frac{z-\alpha_i}{\alpha_j-\alpha_i}(\alpha_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^n x^j \prod_{i\neq j}\frac{\alpha_k-\alpha_i}{\alpha_j-\alpha_i} = x^k = p(\alpha_k) = p(\alpha_k) - \frac{z}{n+1}p'(\alpha_k).$$

Таким образом, $L_E(p) = p - \frac{z}{n+1}p'$.

Коэффициенты $a_1, ..., a_n$ можно считать координатами многочлена $p(z) = z^{n+1} + \sum_{k=1}^n a_k z^{n-k}$ на множестве M. Рассмотрим векторное поле

$$F = \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{n+1}a_k\frac{\partial}{\partial a_k}$$

на M. Тогда

$$L_F(p)(z) = \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{n+1}a_k z^{n-k} = \sum_{k=1}^n (1 - \frac{n-k}{n+1})a_k z^{n-k} =$$

$$= p(z) - \frac{z}{n+1}p'(z) = L_E(p)(z).$$

Кроме того, согласно лемме 2.1,

$$L_E\theta = \frac{1}{n+1}L_E da_1 = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^n \frac{k+1}{n+1}L_{(a_k\frac{\partial}{\partial a_k})}da_1 =$$

$$= \frac{1}{n+1}\frac{2}{n+1}da_1 = \frac{2}{n+1}\theta.$$

$\square$

Задача 2.2. *Докажите, что* $\nabla\nabla E = 0$

Докажем теперь, что наша метрика плоская. Для этого мы построим плоские координаты следующим образом. Рассмотрим функцию $\omega = \omega(p, z)$ на $M \times \mathbb{C}$ такую, что $\omega^{n+1} = p(z)$ и $z = \omega + \frac{t^1}{\omega} + \frac{t^2}{\omega^2} + ...$ Равенство

$$\omega^{n+1} = p(\omega + \frac{t^1}{\omega} + \frac{t^2}{\omega^2} + ...)$$

позволяет найти t^i как полиномы от a_i. В частности, $t^1 = -a_1/(n+1)$, $t^2 = -a_2/(n+1)$

Лемма 2.3. *Функции $t^1, ..., t^n$ образуют координаты на U и*

$$g(\frac{\partial}{\partial t^i}, \frac{\partial}{\partial t^j}) = (n+1)\delta_{i+j,n+1}.$$

Proof. Рассмотрим множество многочленов $p(z,t) = z^{n+1} + a_1(t)z^{n-1} + {} + ... + a_n(t)$,зависящих от наших координат $t = (t^1, ..., t^n)$. Рассмотрим функцию

$$z(\omega, t) = \omega + \frac{t^1}{\omega} + \frac{t^2}{\omega^2} + ...$$

такую, что $\omega^{n+1} = p(z(\omega, t), t)$. Будем считать, что ω и t^i — независимые переменные. Тогда

$$0 = \frac{d\omega^{n+1}}{dt^i} = \frac{\partial p}{\partial t^i} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t^i} = \frac{\partial p}{\partial t^i} + p'\frac{1}{\omega^i}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial p}{\partial t^i} = -\frac{p'}{\omega^i}$$

и

$$g(\frac{\partial}{\partial t^i}, \frac{\partial}{\partial t^j}) = \theta(\frac{\partial}{\partial t^i} \cdot \frac{\partial}{\partial t^j}) = -\mathrm{Res}_{z=\infty}\frac{\frac{\partial p}{\partial t^i} \cdot \frac{\partial p}{\partial t^j}}{p'}dz =$$

$$= -\mathrm{Res}_{z=\infty}\frac{p'dz}{\omega^{i+j}} = -\mathrm{Res}_{\omega=\infty}\frac{dp}{\omega^{i+j}} = -\mathrm{Res}_{\omega=\infty}\frac{d\omega^{n+1}}{\omega^{i+j}} = (n+1)\delta_{i+j,n+1}.$$

□

Лемма 2.4. *В координатах $(t^1, ..., t^n) : U \to \mathbb{C}^n$ поле единиц имеет вид $e = -\frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial t^n}$ и $\nabla e = 0$, где ∇ — связность, порожденная метрикой g.*

Proof. Напомним, что $t^1 = -a_1/(n+1)$. Пусть поле единиц имеет вид $e = \sum_\alpha \rho_\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}$. Тогда согласно леммам 2.1 и 2.3

$$\delta_{\beta,1} = dt^1(\frac{\partial}{\partial t^\beta}) = \frac{-1}{n+1}da_1(\frac{\partial}{\partial t^\beta}) = -\theta(\frac{\partial}{\partial t^\beta}) = -g(e, \frac{\partial}{\partial t^\beta}) =$$

$$= -g(\sum_{\alpha=1}^n \rho_\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}, \frac{\partial}{\partial t^\beta}) = -\sum_{\alpha=1}^n \rho_\alpha g(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}, \frac{\partial}{\partial t^\beta}) =$$

$$= -(n+1)\sum_{\alpha=1}^n \rho_\alpha \delta_{\alpha+\beta,n+1} = -(n+1)\rho_{n+1-\beta}$$

Следовательно, $\rho_{n+1-\beta} = -\frac{1}{n+1}\delta_{\beta,1}$, $\rho_\alpha = -\frac{1}{n+1}\delta_{n+1-\alpha,1}$ и $e = -\frac{1}{n+1}\partial/\partial t^n$. Это поле параллельных векторов (т.е.$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t^\alpha}}(e) = 0.$), поскольку, согласно лемме 2.3, координаты $\{t^i\}$ плоские. □

Леммы 2.1-2.4 и задача 2.2 доказывают что

Теорема 2.1. *Фробениусовы пары (M_p, θ_p) задают на M структуру Дубровина.*

3. Фробениусовы структуры

Следующие 5 разделов посвящены доказательству теоремы Дубровина, о естественном взаимно-однозначном соответствии между структурами Дубровина и решениями WDVV уравнений. Для этого мы будем поэтапно "переписывать" геометрические аксиомы структуры Дубровина в удобной для доказательства аналитической форме.

В этом разделе мы покажем. что существование координатной системы, порождающей канонические базисы в касательном пространстве эквивалентно симметрии некоторого специального тензорного поля. Это свойство понадобится нам в дальнейшем для построение решения WDVV уравнений.

Определение 3.1. *Пусть M — гладкое вещественное или комплексное многообразие. Почти фробениусовой структурой на M называется структура полупростой фробениусовой пары (M_p, θ_p) в касательном пространстве $M_p = T_pM$ в каждой точке $p \in M$, причем*

1) тензор $\theta = \{\theta_p | p \in M\}$ гладкий;

2) канонические базисы алгебр M_p образуют гладкие векторные поля $X_1, ..., X_n$.

Метрический тензор $g(a, b) = \theta(a \cdot b)$ дает связность ∇. Таким образом,

$$L_Z(g(X,Y)) = (\nabla_Z g)(X,Y) + g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

где L_Z — производная Ли. Положим

$$c(a, b, d) = \theta(a \cdot b \cdot d) \quad \text{и} \quad \gamma(V, X, Y, Z) = (\nabla_V c)(X, Y, Z).$$

Напомним, что

$$L_U(C(X,Y,Z)) = (\nabla_U C)(X,Y,Z) + C(\nabla_U X, Y, Z) + C(X, \nabla_U Y, Z) + C(X, Y, \nabla_U Z),$$

для $X, Y, Z, U \in TM,\ C \in T^*M \otimes T^*M \otimes T^*M$.

Лемма 3.1. *Пусть тензор $\gamma(X, Y, Z, V)$ симметричен относительно всех 4 переменных. Тогда:*

1) $g(\nabla_{X_k} X_i, X_j) = 0$, если $k \neq i, i \neq j, k \neq j$.

2) $g(\nabla_{X_i} X_i, X_j) = g(\nabla_{X_j} X_j, X_i)$.

3) $g(\nabla_{X_i} X_j, X_i) = g(\nabla_{X_j} X_i, X_i)$.

Proof. По определению $\gamma(X_k, X_j, X_\ell, X_i) = (\nabla_{X_k} c)(X_j, X_\ell, X_i) =$
$= L_{X_k}(c(X_j, X_\ell, X_i)) - c(\nabla_{X_k} X_j, X_\ell, X_i) - c(X_j, \nabla_{X_k} X_\ell, X_i) - c(X_j, X_\ell, \nabla_{X_k} X_i) =$
$= L_{X_k}(\theta(X_j \cdot X_\ell \cdot X_i)) - \theta(\nabla_{X_k} X_j \cdot X_\ell \cdot X_i) - \theta(X_j \cdot \nabla_{X_k} X_\ell \cdot X_i) - \theta(X_j \cdot X_\ell \cdot \nabla_{X_k} X_i)$.

Пусть $i \neq j, j \neq k, i \neq k$ Тогда $-g(\nabla_{X_k} X_i, X_j) = -\theta(\nabla_{X_k} X_i \cdot X_j \cdot X_j) =$
$= L_{X_k}(\theta(X_i \cdot X_j \cdot X_j)) - \theta(\nabla_{X_k} X_i \cdot X_j \cdot X_j) - \theta(X_i \cdot \nabla_{X_k} X_j \cdot X_j) - \theta(X_i \cdot X_j \cdot \nabla_{X_k} X_j) =$
$= \gamma(X_k, X_i, X_j, X_j) = \gamma(X_j, X_i, X_j, X_k) =$
$L_{X_j}(\theta(X_i \cdot X_j \cdot X_k)) - \theta(\nabla_{X_j} X_i \cdot X_j \cdot X_k \cdot X_k) - \theta(X_i \cdot \nabla_{X_j} X_j \cdot X_k) - \theta(X_i \cdot X_j \cdot \nabla_{X_k}, X_k) = 0$.

Пусть $i \neq j$. Тогда $-g(\nabla_{X_i} X_i, X_j) = -\theta(\nabla_{X_i} X_i \cdot X_j \cdot X_j) =$
$L_{X_i}(\theta(X_i \cdot X_j \cdot X_j)) - \theta(\nabla_{X_i} X_i \cdot X_j \cdot X_j) - \theta(X_i \cdot \nabla_{X_i} X_j \cdot X_j) - \theta(X_i \cdot X_j \cdot \nabla_{X_i} X_j) =$
$= \gamma(X_i, X_i, X_j, X_j) = \gamma(X_j, X_j, X_i, X_i) = -g(\nabla_{X_j} X_j, X_i)$.

Кроме того, если $i \neq j$, то $-g(\nabla_{X_i}, X_j, X_i) = -\theta(\nabla_{X_i} X_j \cdot X_i \cdot X_i) =$
$L_{X_i}(\theta(X_j \cdot X_i \cdot X_i)) - \theta(\nabla_{X_i} X_j \cdot X_i \cdot X_i) - \theta(X_j \cdot \nabla_{X_i} X_i \cdot X_i) - \theta(X_j \cdot X_i \cdot \nabla_{X_i} X_i) =$
$\gamma(X_i, X_j, X_i, X_i) = \gamma(X_j, X_i, X_i, X_i) = L_{X_j}(\theta(X_i \cdot X_i \cdot X_i)) - 3\theta(\nabla_{X_j} X_i \cdot X_i \cdot X_i) =$

$$L_{X_j}(g(X_i, X_i)) - 3g(\nabla_{X_j} X_i, X_i) = 2g(\nabla_{X_j} X_i, X_i) - 3g(\nabla_{X_j} X_i, X_i) = -g(\nabla_{X_j}, X_i, X_i).$$
□

Задача 3.1. *Пусть M — многообразие с почти фробениусовой структурой, удовлетворяющее условиям 1-3 леммы 3.1. Тогда тензор $\gamma(X, Y, Z, V)$ симметричен относительно всех 4 переменных.*

Определение 3.2. *Пусть $(x^1, ..., x^n)$ — система координат на $U \subset M$. Она называется канонической, если векторы $\partial/\partial x^1, ..., \partial/\partial x^n$ образуют канонический базис в каждой точке $p \in U$.*

Определение 3.3. *Почти фробениусова структура на M называется фробениусовой, если $d\theta = 0$ и каждая точка $p \in M$ имеет окрестность с канонической системой координат.*

Задача 3.2. *Пусть M — многообразие с фробениусовой структурой и $(x^1, ..., x^n)$ — каноническая система координат в $U \subset M$. Тогда существует функция $t : U \to \mathbb{K}$ такая, что $\theta = \sum \mu_i dx^i$, $g = \sum \mu_i dx^i \otimes dx^i$ и $c = \sum \mu_i dx^i \otimes dx^i \otimes dx^i$, где $\mu_i = \partial t/\partial x^i$.*

Теорема 3.1. *Почти фробениусова структура является фробениусовой, если и только если тензор $\gamma = \nabla C$ симметричен относительно всех 4 переменных.*

Proof. Рассмотрим линейные формы $\eta^1, ..., \eta^n \in T^*U$, образующие базис, двойственный к $X_1, ..., X_n$ в каждой точке $p \in U$. Положим $\mu_k = \theta(X_k)$. Тогда

$$\theta = \sum_k \mu_k \eta^k, \quad g = \sum \mu_k \eta^k \otimes \eta^k$$

и

$$g(\nabla_{X_i} X_j, X_k) = \sum_\ell \mu_\ell \eta^\ell(\nabla_{X_i} X_j) \cdot \eta^\ell(X_k) = \mu_k \eta^k(\nabla_{X_i} X_j).$$

С другой стороны, $\nabla_{X_i} \eta^k = \sum_j \alpha_j \eta^j$, где

$$\alpha_j = (\nabla_{X_i} \eta^k)(X_j) = L_{X_i}(\eta^k(X_j)) - \eta^k(\nabla_{X_i} X_j) = -\mu_k^{-1} g(\nabla_{X_i} X_j, X_k).$$

Таким образом,

$$\nabla_{X_i} \eta^k = -\sum_j \mu_k^{-1} g(\nabla_{X_i} X_j, X_k) \eta^j.$$

Пусть $\gamma = \nabla c$ — симметричный тензор. Докажем, что $d\eta^k = 0$.

Согласно лемме 3.1 если $i \neq k$, то

$$\nabla_{X_i} \eta^k = -\mu_k^{-1} g(\nabla_{X_i} X_i, X_k) \eta^i - \mu_k^{-1} g(\nabla_{X_i} X_k, X_k) \eta^k$$

и

$$\nabla_{X_k} \eta^k = -\sum_j \mu_k^{-1} g(\nabla_{X_k} X_j, X_k) \eta^j = -\sum_j \mu_k^{-1} g(\nabla_{X_j} X_k, X_k) \eta^j.$$

Согласно стандартным формулам дифференциальной геометрии

$$d\eta^k = \sum_i (\eta^i \wedge \nabla_{X_i} \eta^k).$$

откуда,

$$\mu_k d\eta^k = \sum_i (\eta^i \wedge \mu_k \nabla_{X_i} \eta^k) = \sum_{i \neq k} (\eta^i \wedge \mu_k \nabla_{X_i} \eta^k) + \eta^k \wedge \mu_k \nabla_{X_k} \eta^k =$$

$$= -\sum_{i\neq k}(\eta^i \wedge g(\nabla_{X_i}X_i, X_k)\eta^i + \eta^i \wedge g(\nabla_{X_i}X_k, X_k)\eta^k) - \eta^k \wedge \sum_j g(\nabla_{X_j}X_k, X_k)\eta^j =$$

$$= -\sum_{i\neq k} g(\nabla_{X_i}X_k, X_k)\eta^i \wedge \eta^k - \sum_i g(\nabla_{X_i}X_k, X_k)\eta^k \wedge \eta^i = 0.$$

Таким образом, $d\eta^k = 0$. Согласно лемме Пуанкаре в окрестности каждой точки $p \in U$ существуют функции x^k такие, что $dx^k = \eta^k$. Они дают координаты $(x^1, ..., x^n)$ такие, что $\partial/\partial x^i = X^i$.

Докажем, что $d\theta = 0$.

Если $i \neq j$, то $0 = \nabla_{X_i}(g(X_i, X_j) = g(\nabla_{X_i}X_i, \nabla_{X_i}X_j)$. Поэтому, согласно лемме 3.1,

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial x^j} = \frac{\partial(\theta(X_i))}{\partial x^j} = L_{X_j}(\theta(X_i)) = L_{X_j}(g(X_i, X_i)) = g(\nabla_{X_j}X_i, X_i) + g(X_i, \nabla_{X_j}X_i) =$$

$$2g(\nabla_{X_i}X_j, X_i) = -2g(\nabla_{X_i}X_i, X_j).$$

Аналогично $\frac{\partial \mu_j}{\partial x^i} = -2g(\nabla_{X_j}X_j, X_i)$. Согласно лемме 3.1, отсюда следует, что

$$\frac{\partial \mu_j}{\partial x^i} = \frac{\partial \mu_i}{\partial x^j}.$$

Таким образом,

$$d\theta = d(\sum_{i=1}^n \mu_i \eta^i) = d(\sum_i \mu_i dx^i) = \sum_i d\mu_i \wedge dx^i =$$

$$= \sum_i (\sum_j \frac{\partial \mu_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i) = 0.$$

Обратное утверждение остается в качестве упражнения □

Пример 3.1. *Найдем тензор γ для структуры из примера 2.1. Имеем $M = \mathbb{C}^n = \{(x^1, ..., x^n)\}$, $(\sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i})(\sum_j b^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = (\sum_i a^i b^i \frac{\partial}{\partial x^i})$ и $\theta(\sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}) = \sum_i a_i$. Поэтому $c = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i \otimes dx^i$, $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\nabla_{X_i} = \frac{\partial}{\partial x^i} = L_{X_i}$ и $\gamma(X_i, X_j, X_k, X_\ell) = (\nabla_{X_i}c)(X_j, X_k, X_\ell) = \frac{\partial}{\partial x^i}(c(X_j, X_k, X_\ell)) - c(\frac{\partial}{\partial x^i}X_j, X_k, X_\ell) - c(X_j, \frac{\partial}{\partial x^i}X_k, X_\ell) - c(X_j, X_k, \frac{\partial}{\partial x^i}X_\ell) = 0$.*

Пример 3.2. *Построим почти фробениусову структуру, которая не является фробениусовой. Пусть*

$$M = \mathbb{R}^2 \setminus 0 = \{(x^1, x^2)\}, \quad r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \quad \varphi = arctg\frac{x^2}{x^1}.$$

Пусть далее $p = (r, \varphi) \in M$. Тогда $\partial/\partial r, \partial/\partial\varphi$ образуют базис M_p. Положим

$$(a_r\frac{\partial}{\partial r}, a_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}) \cdot (b_r\frac{\partial}{\partial r}, b_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi)}) = (a_r b_r\frac{\partial}{\partial r}, a_\varphi b_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi})$$

и $\theta = dr + r^2 d\varphi$. Таким образом, мы построили почти фробениусову структуру. Но $d\theta = 2rdr \wedge d\varphi \neq 0$. Таким образом, она не фробениусова.

4. Уравнения Дарбу–Егорова

В этом разделе мы покажем, что записанное в канонических координатах условие нулевой кривизны и параллельности поля единиц эквивалентна классическим уравнениям Дарбу-Егорова, описывающим ортогональные системы координат в плоском пространстве. Далее мы связываем с уравнениями Дарбу-Егорова систему уравнений типа Пфаффа, решения которой, как мы увидим в дальнейшем, описывают геодезические дубровинской метрики.

Пусть M — многообразие с фробениусовой структурой. То есть в окрестности $U \ni p$ точки $p \in M$ существуют канонические координаты $(x^1, ..., x^n)$ и функция $t : U \to C$ такая, что $\theta = dt$. В этих координатах единица, линейная форма и метрика имеют вид

$$e = \sum_{i=1}^{n} \partial_i, \ \theta = \sum_i \mu_i dx^i, \ g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = \mu_i \delta_{ij}$$

, где $\partial_i = \partial/\partial x^i$ и $\mu_i = \partial_i t$.

Для $i \neq j$ положим

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial_j \sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\mu_j}} = \frac{1}{2} \frac{\partial_j \mu_i}{\sqrt{\mu_i \mu_j}} = \frac{1}{2} \frac{\partial_j \partial_j t}{\sqrt{\mu_i \mu_j}} = \gamma_{ji}.$$

Тогда символы Кристоффеля

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j \neq k, i \neq k$$

и

$$\Gamma_{ij,i} = -\Gamma_{ii,j} = \Gamma_{ji,i} = \frac{1}{2} \partial_j g_{ii} = \frac{1}{2} \partial_j \mu_i = \sqrt{\mu_i \mu_j} \gamma_{ij} \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Лемма 4.1. *Если метрика g плоская, то $\partial_\ell \gamma_{ij} = \gamma_{i\ell}\gamma_{\ell j}$ для попарно различных i, j, ℓ.*

Proof. Нам понадобится равенство

$$\partial_\ell \sqrt{\mu_i \mu_j} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_i \mu_j}}(\mu_j \partial_\ell \mu_i + \mu_i \partial_\ell \mu_j) = \frac{1}{2\sqrt{\mu_i \mu_j}}(\mu_j \cdot 2\sqrt{\mu_\ell \mu_i}\gamma_{\ell i} + \mu_i \cdot 2\sqrt{\mu_i \mu_j}\gamma_{ij}) = \sqrt{\mu_\ell \mu_j}\gamma_{\ell i} + \sqrt{\mu_\ell \mu_i}\gamma_{\ell j}.$$

Компоненты тензора кривизны равны

$$R_{ikj\ell} = \frac{1}{2}(\partial_k \partial_j g_{i\ell} + \partial_i \partial_\ell g_{kj} - \partial_k \partial_\ell g_{ij}) + \sum_{ab} g^{ab}(\Gamma_{kj,a}\Gamma_{i\ell,b} - \Gamma_{k\ell,a}\Gamma_{ij,b}),$$

где $g_{ij} = \delta_{ij}\mu_i, \quad g^{ij} = \delta_{ij}\mu_i^{-1}$. Таким образом, равенство $R_{ij,j\ell} = 0$ для попарно различных i, j, ℓ влечет

$$0 = \frac{1}{2}\partial_i \partial_\ell g_{jj} + \mu_i^{-1}\Gamma_{jj,i}\Gamma_{i\ell,i} + \mu_\ell^{-1}\Gamma_{jj,\ell}\Gamma_{i\ell,\ell} - \mu_j^{-1}\Gamma_{j\ell,j}\Gamma_{ij,j} =$$

$$\frac{1}{2}\partial_i \partial_\ell \mu_j - \mu_i^{-1}(\sqrt{\mu_i \mu_j}\gamma_{ij} \cdot \sqrt{\mu_i \mu_\ell}\gamma_{i\ell}) - \mu_\ell^{-1}(\sqrt{\mu_j \mu_\ell}\gamma_{ij} \cdot \sqrt{\mu_i \mu_\ell}\gamma_{i\ell}) - \mu_j^{-1}(\sqrt{\mu_j \mu_\ell}\gamma_{j\ell} \cdot \sqrt{\mu_i \mu_j}\gamma_{ij}) =$$

$$= \partial_\ell(\sqrt{\mu_i \mu_j}\gamma_{ij}) - \sqrt{\mu_j \mu_\ell}\gamma_{ij}\gamma_{i\ell} - \sqrt{\mu_j \mu_i}\gamma_{j\ell}\gamma_{i\ell} - \sqrt{\mu_\ell \mu_i}\gamma_{j\ell}\gamma_{ij} =$$

$$\sqrt{\mu_j \mu_\ell}\partial_\ell \gamma_{ij} + \gamma_{ij}\partial_\ell \sqrt{\mu_i \mu_j} - \sqrt{\mu_j \mu_\ell}\gamma_{ij}\gamma_{i\ell} - \sqrt{\mu_j \mu_i}\gamma_{i\ell}\gamma_{j\ell} - \sqrt{\mu_\ell \mu_i}\gamma_{j\ell}\gamma_{ij}.$$

Таким образом, равенство

$$\partial_\ell \sqrt{\mu_i \mu_j} = \sqrt{\mu_j}\partial_\ell \sqrt{\mu_i} + \sqrt{\mu_i}\partial_\ell \sqrt{\mu_j} = \sqrt{\mu_j \mu_\ell}\gamma_{\ell i} + \sqrt{\mu_i \mu_\ell}\gamma_{\ell j}$$

влечет

$$0 = \sqrt{\mu_i \mu_j}(\partial_\ell \gamma_{ij} - \gamma_{j\ell}\gamma_{i\ell}).$$

□

Лемма 4.2. *Если* $\nabla e = 0$, *то* $\sum\limits_{i=1}^{n} \partial_i \sqrt{\mu_k} = \sum\limits_{i=1}^{n} \partial_i \gamma_{kj} = 0.$

Proof. Положим $g^{ks} = (g^{-1})_{ks} = \mu_k^{-1}\delta_{ks}$ и $\Gamma_{ij}^k = \sum_s g^{ks}\Gamma_{ij,s} = \mu_k^{-1}\Gamma_{ij,k}$.

Условие $\nabla e = 0$ влечет

$$0 = \nabla_{\partial_j}(\sum_i \partial_i) = \sum_i (\nabla_{\partial_j}\partial_i) = \sum_i (\sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k) = \sum_k (\sum_i \Gamma_{ij}^k)\partial_k.$$

Следовательно, $\sum\limits_i \Gamma_{ij}^k = 0$. В частности, $\sum\limits_i \Gamma_{ik}^k = 0$ и

$$0 = \Gamma_{kk}^k + \sum_{i\neq k} \Gamma_{ik}^k = \mu_k^{-1}\Gamma_{kk,k} + \mu_k^{-1}\sum_{i\neq k}\Gamma_{ik,k} = \frac{1}{2}\mu_k^{-1}\partial_k\mu_k + \frac{1}{2}\mu_k^{-1}\sum_{i\neq k}\partial_k\mu_i =$$

$$\frac{1}{2}\mu_k^{-1}\partial_k\mu_k + \mu_k^{-1}\sum_{i\neq k}\sqrt{\mu_k\mu_i}\gamma_{ki} = \frac{1}{2}\mu_k^{-1}\partial_k\mu_k + \sum_{i\neq k}\sqrt{\frac{\mu_i}{\mu_k}}\gamma_{ki}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial_k\mu_k}{\sqrt{\mu_k}} + \sum_{i\neq k}\sqrt{\mu_i}\gamma_{ki} = 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n}\partial_i\sqrt{\mu_k} = \partial_k\sqrt{\mu_k} + \sum_{i\neq k}\partial_i\sqrt{\mu_k} = \frac{1}{2}\frac{\partial_k\mu_k}{\sqrt{\mu_k}} + \sum_{i\neq k}\sqrt{\mu_i}\gamma_{ik} = 0.$$

Это дает

$$\sum_{i=1}^{n}\partial_i\sqrt{\mu_j\mu_k} = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\mu_j}\partial_i\sqrt{\mu_k} + \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\mu_k}\partial_i\sqrt{\mu_j} = 0.$$

В частности, $\sum_{i=1}^n \partial_i\mu_k = 0$. Значит, при $j \neq k$

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\partial_i(\partial_j\mu_k) = 2\sum_{i=1}^{n}\partial_i(\sqrt{\mu_j\mu_k}\gamma_{jk}) = 2(\gamma_{jk}\sum_{i=1}^{n}\partial_i\sqrt{\mu_j\mu_k} + \sqrt{\mu_j\mu_k}\sum_{i=1}^{n}\partial_i\gamma_{jk}) = 2\sqrt{\mu_j\mu_k}\sum_{i=1}^{n}\partial_i\gamma_{jk}.$$

□

Задача 4.1. *Доказать, что* $\nabla e = 0$, *если и только если для всех* k *выполнено равенство* $\sum\limits_{i=1}^{n}\partial_i\sqrt{\mu_k} = 0$.

Задача 4.2. *Доказать, что* $\nabla e = 0$, *если и только если* $\nabla\theta = 0$.

Задача 4.3. *Доказать, что если* $\sum\limits_{k=1}^{n}\partial_k\gamma_{ij} = 0$ *и* $\partial_\ell\gamma_{ij} = \gamma_{i\ell}\gamma_{\ell j}$ *для всех* $\ell \neq i, j$, *то* g *является плоской метрикой.*

Леммы 4.2 и 4.1 приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} \partial_k \gamma_{ij} = \gamma_{ik}\gamma_{kj} \ (k \neq i, j; \ i \neq j; \ i, j, k = 1, ..., n), \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \partial_k \gamma_{ij} = 0 \ (i \neq j) \end{cases}.$$

Она называется системой Дарбу-Егорова и впервые она возникла в конце XIX века в работах Егорова и Дарбу, связанных с описанием плоских метрик в системах ортогональных координат. Значительно позже было найдено, что эти же уравнения описывают взаимодействие n волн.

Наша ближайшая цель — изучит множество решений системы Дарбу-Егорова.

Определение 4.1. *Рассмотрим матрицы* $\Gamma = \{\gamma_{ij}\}$, *где* $\gamma_{ii} = 0$, *и* $E_k = \{(E_k)_{ij}\}$, *где* $(E_k)_{ij} = \delta_{ik}\delta_{jk}$. *Обозначим через* H *пространство вектор-функций* $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \dots \\ \psi_n \end{pmatrix}$ *таких, что* $\partial_k \psi = -[E_k, \Gamma]\psi$.

Теорема 4.1. *Пусть* $\nabla e = 0$ *и метрика* g *плоская. Тогда:*

(1) $\psi \in H$, *если и только если* $\sum\limits_{k=1}^{n} \partial_k \psi_i = 0$ $(i = 1, ..., n)$ *и* $\partial_k \psi_i = \gamma_{ik}\psi_k$ *при* $k \neq i$;

(2) $\begin{pmatrix} \gamma_{1j} \\ \dots \\ \gamma_{nj} \end{pmatrix} \in H$ *при всех* j, *то есть* $\partial_k \Gamma = -[E_k, \Gamma]\Gamma$;

(3) $dim H = n$.

Proof. 1) По определению,

$$-[E_k, \Gamma] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \dots \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{1k}\psi_k \\ \dots \\ \gamma_{k-1,k}\psi_k \\ -\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ik}\psi_i \\ \gamma_{k+1,k}\psi_k \\ \dots \\ \gamma_{nk}\psi_k \end{pmatrix}$$

и система $\partial_k \psi = -[E_k, \Gamma]\psi$ эквивалентна системе

$$\partial_k \psi_i = \gamma_{ik}\psi_k \ (i \neq k),$$

$$\partial_k \psi_k = -\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ik}\psi_i.$$

Эта система эквивалентна

$$\partial_k \psi_i = \gamma_{ik}\psi_k \ (i \neq k),$$

$$\partial_k \psi_k = -\sum_{i \neq k} \partial_i \psi_k.$$

2) Положим $\psi_i = \gamma_{ij}$. Тогда согласно леммам 4.1 и 4.2 $\partial_k \psi_i = \gamma_{ik}\psi_k$ для $i \neq k$ и $\sum_{k=1}^{n} \partial_k \psi_i = 0$. Таким образом, утверждение 1) этой теоремы дает

$$\partial_k \begin{pmatrix} \gamma_{1j} \\ \dots \\ \gamma_{nj} \end{pmatrix} = \partial_k \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \cdots \\ \psi_n \end{pmatrix} = -[E_k, \Gamma] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \cdots \\ \psi_n \end{pmatrix} = -[E_k, \Gamma] \begin{pmatrix} \gamma_{1j} \\ \cdots \\ \gamma_{nj} \end{pmatrix}.$$

3) Система $\partial_k \psi = -[E_k, \Gamma]\psi$ $(k = 1, ..., n)$ является системой типа Пфаффа. Она совместна, если и только если матрица Γ гарантирует условие $\partial_j \partial_k \psi = \partial_k \partial_j \psi$, то есть $\partial_j([E_k, \Gamma]\psi) = \partial_k([E_j, \Gamma]\psi)$ для всех $\psi \in H$

Утверждения 1) и 2) влекут

$$\partial_j([E_k, \Gamma]\psi) = \partial_j([E_k, \Gamma])\psi + [E_k, \Gamma]\partial_j \psi = [E_k, \partial_j \Gamma]\psi + [E_k, \Gamma]\partial_j \psi =$$

$$-[E_k, [E_j, \Gamma]\Gamma]\psi + [E_k, \Gamma]\partial_j \psi = -[E_j, \Gamma][E_k, \Gamma]\psi - [E_k, \Gamma][E_j, \Gamma]\psi = \partial_k([E_j, \Gamma]\psi).$$

Таким образом, система $\partial_k \psi = -[E_k, \Gamma]$ $(k = 1, ..., n)$ совместна. Согласно теории систем типа Пфаффа отсюда следует, что размерность пространств решений этой системы равна n. $\square$

Задача 4.4. *Доказать, что вектор-функции $\psi_1, \dots, \psi_n \in H$ линейно независимы если и только, если векторы $\psi_1(x_0), \dots, \psi_n(x_0) \in H$ линейно независимы хотя бы в одной точке $x_0 \in M$.*

Определение 4.2. *Фробениусову структуру с плоской метрикой и параллельным полем единиц назовем плоской.*

5. Эйлерово поле

В этом разделе мы покажем, что Эйлерово поле дубровинской структуры порождает линейный оператор в пространстве решений построенной в предыдущем параграфе системы типа Пфаффа.

Определение 5.1. *Пусть M — многообразие, наделенное фробениусовой структурой, $(x^1, ..., x^n)$ — канонические координаты и $\theta = \sum_{i=1}^{n} \mu_i dx^i$. Поле $E = \sum_{i=1}^{n} x^i \partial_i$, где $\partial_i = \partial/\partial x^i$, называется эйлеровым. Фробениусову структуру на M назовем однородной, если $L_E \mu_i = m\mu_i$, где $m = const$.*

Лемма 5.1. *Пусть $(x^1, ..., x^n)$ — канонические координаты плоской однородной фробениусовой структуры. Тогда $L_E \theta = (m+1)\theta$, $L_E g = (m+2)g$, $L_E c = (m+3)c$, $L_E e = -e$, $L_E \gamma_{ij} = -\gamma_{ij}$.*

Proof. Напомним, что если

$$T = \sum T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_p}$$

и $E = \sum E^k \partial_k$, то

$$L_E T = \sum (L_E T)^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_p},$$

где

$$(L_E T)^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = \sum_k E^k \partial_k T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} + \sum_k T^{i_1 \cdots i_p}_{k j_2 \cdots j_q} \partial_{j_1} E^k + \cdots +$$

$$\cdots + \sum_k T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{q-1}k}\partial_{j_q}E^k - \sum_k T^{ki_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\partial_k E^{i_1} - \cdots - \sum_k T^{i_1\cdots i_{p-1}k}_{j_1\cdots j_q}\partial_k E^{i_p}.$$

Таким образом, если $E = \sum\limits_{k=1}^{n} x^k\partial_k$, то

$$m\mu_i = L_E\mu_i = \sum_{k=1}^{n} x^k\partial_k\mu_i$$

и

$$L_E\theta = L_{\sum\limits_k x^k\partial_k}(\sum_j \mu_j \cdot dx^j) = \sum_j(\sum_k x^k\partial_k\mu_j + \sum_k \mu_j\partial_j x^k)dx^j =$$

$$= \sum_j (m\mu_j + \mu_j)dx^j = (m+1)\sum_j \mu_i dx^j = (m+1)\theta.$$

Аналогично $L_E g = (m+2)g,\ L_E c = (m+3)c$ и $L_E e = -e$. Наконец,

$$L_E\gamma_{ij} = L_E(\frac{1}{\sqrt{\mu_i\mu_j}}\partial_j\mu_i) =$$

$$= -\frac{1}{2}(\mu_i\mu_j)^{-\frac{3}{2}}L_E(\mu_i\mu_j)\partial_j\mu_i + (\mu_i\mu_j)^{-\frac{1}{2}}L_E\partial_j\mu_i =$$

$$= -\frac{1}{2}(\mu_i\mu_j)^{-\frac{3}{2}}(2m\mu_i\mu_j)\partial_j\mu_i + (\mu_i\mu_j)^{-\frac{1}{2}}(\sum_k x^k\partial_k\partial_j\mu_i) =$$

$$= -m(\mu_i\mu_j)^{-\frac{1}{2}}\partial_j\mu_i + (\mu_i\mu_j)^{-\frac{1}{2}}(\partial_j\sum_k x^k\partial_k\mu_i - \partial_j\mu_i) =$$

$$= (\mu_i\mu_j)^{-\frac{1}{2}}(-m\partial_j\mu_i + \partial_j m\mu_i - \partial_j\mu_i) = -(\mu_i\mu_j)^{-\frac{1}{2}}\partial_j\mu_i = -\gamma_{ij}.$$

□

Задача 5.1. *Доказать, что плоская фробениусова структура однородна, если и только если $L_E\theta = (m+1)\theta$.*

Задача 5.2. *Рассмотрим многообразие со структурой Дубровина. Пусть φ — группа диффеоморфизмов, порожденная E. Тогда $\varphi_t(a)\varphi_t(b) = k_t\varphi_t(a\cdot b)$. Таким образом, φ_t порождает деформацию фробениусовых алгебр.*

Положим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad V = [\Gamma, X].$$

Следующая лемма показывает, что уравнения Дарбу-Егорова с условием однородности имеют лаксово представление.

Лемма 5.2. *Пусть матрица Γ отвечает многообразию с плоской однородной фробениусовой структурой. Тогда $\partial_k V = [V, [E_k, \Gamma]]$.*

Proof. По определению, $V_{ii} = 0$ и $V_{ij} = (x^j - x^i)\gamma_{ij}$, если $i \neq j$. Кроме того $([E_k, \Gamma])_{ij} = \delta_{ki}\gamma_{kj} - \delta_{kj}\gamma_{ki}$. Следовательно,

$$([V, [E_k, \Gamma]])_{ij} = \sum_s V_{is}([E_k, \Gamma])_{sj} - \sum_s([E_k, \Gamma])_{is}V_{sj} =$$

$$= \sum_s (x^s - x^i)\gamma_{is}(\delta_{ks}\gamma_{kj} - \delta_{kj}\gamma_{ks}) - \sum_s(\delta_{ki}\gamma_{ks} - \delta_{ks}\gamma_{ki})(x^j - x^s)\gamma_{sj} =$$

$$= (x^k - x^i)\gamma_{ik}\gamma_{kj} - \sum_s (x^s - x^i)\gamma_{is}\delta_{kj}\gamma_{ks} - \sum_s \delta_{ki}\gamma_{ks}(x^j - x^s)\gamma_{sj} + \gamma_{ki}(x^j - x^k)\gamma_{kj} =$$

$$= (x^j - x^i)\gamma_{ik}\gamma_{kj} - \delta_{kj}\sum_s (x^s - x^i)\gamma_{is}\gamma_{sk} - \delta_{ki}\sum_s (x^j - x^s)\gamma_{js}\gamma_{sk}.$$

Если $k \neq i\ j$, то $([V, [E_k, \Gamma]])_{ij} = (x^j - x^i)\gamma_{ik}\gamma_{kj}$ и согласно лемме 4.1

$$\partial_k V_{ij} = \partial_k((x^j - x^i)\gamma_{ij}) = (x^j - x^i)\partial_k\gamma_{ij} = (x^j - x^i)\gamma_{ik}\gamma_{kj} = ([V, [E_k, \Gamma]])_{ij}.$$

Если $k = i \neq j$, то $([V, [E_k, \Gamma]])_{ij} = -\sum\limits_s (x^j - x^s)\gamma_{js}\gamma_{si}$ и согласно леммам 4.2, 4.1 и 5.1 имеем

$$\partial_i V_{ij} = \partial_i[(x^j - x^i)\gamma_{ij}] = -\gamma_{ij} + (x^j - x^i)\partial_i\gamma_{ij} = L_E\gamma_{ij} + x^j\partial_i\gamma_{ij} - x^i\partial_i\gamma_{ij} =$$

$$= \big(\sum_{s=1}^n x^s\partial_s\gamma_{ij} - x^i\partial_i\gamma_{ij}\big) + \big(x^j\partial_i\gamma_{ij} - x^j\sum_{s=1}^n \partial_s\gamma_{ij}\big) =$$

$$= \sum_{s\neq i} x^s\partial_s\gamma_{ij} - \sum_{s\neq i} x^j\partial_s\gamma_{ij} = \sum_{s\neq i}(x^s - x^j)\partial_s\gamma_{ij} =$$

$$= \sum_{s\neq i,j}(x^s - x^j)\partial_s\gamma_{ij} = \sum_{s\neq ij}(x^s - x^j)\gamma_{is}\gamma_{sj} = ([V, [E_i, \Gamma]])_{ij}.$$

□

Теорема 5.1. *Пусть матрица V отвечает многообразию M с плоской однородной фробениусовой структурой. Тогда*

(1) *Если $\psi \in H$, то $L_E\psi = V\psi$.*
(2) *$V(x)H \subset H$ для всех $x \in M$.*
(3) *Если $\psi \in H$ и $V(x_0)\psi(x_0) = \lambda\psi(x_0)$ для некоторого $x_0 \in M$, то $V(x)\psi(x) = \lambda\psi(x)$ для всех $x \in M$.*

Proof. 1)

$$L_E\psi = \sum_{i=1}^n x^i\partial_i\psi = -\sum_{i=1}^n x^i[E_i, \Gamma]\psi = [\Gamma, \sum_{i=1}^n x^iE_i]\psi = [\Gamma, X]\psi = V\psi.$$

2) Пусть $\psi \in H$. Тогда согласно лемме 5.2

$$\partial_k(V\psi) = (\partial_kV)\psi + V\partial_k\psi = [V, [E_k, \Gamma]]\psi - V[E_k, \Gamma]\psi =$$
$$= V[E_k, \Gamma]\psi - [E_k, \Gamma]V\psi - V[E_k, \Gamma]\psi = -[E_k, \Gamma](V\psi).$$

Следовательно, $V\psi \in H$.

3) Пусть $(\psi^1, \psi^2, ..., \psi^n)$ — базис H, где $\psi^1 = \psi$ (теорема 4.1) . Тогда согласно утверждению (2) $V(x)\psi^i = \sum\limits_{j=1}^n m^i_j\psi^j$, где $m^i_j = \mathrm{const}$. Следовательно, если $V(x_0)\psi^1(x_0) = \lambda\psi^1(x_0)$, то $m^1_j = \lambda\delta_{1j}$ и $V(x)\psi^1 = \lambda\psi^1$. □

Лемма 5.3. *Пусть матрица V отвечает многообразию с плоской однородной фробениусовой структурой. Тогда вектор*

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} \\ \dots \\ \sqrt{\mu_n} \end{pmatrix}$$

принадлежит H и $V\Phi = \frac{m}{2}\Phi$.

Proof. По определению

$$\partial_k \sqrt{\mu_i} = \gamma_{ik}\sqrt{\mu_k} \ \ (i \neq k,\ i,k = 1,...,n).$$

Согласно лемме 4.2,

$$\sum_{k=1}^{n} \partial_k \sqrt{\mu_i} = 0 \ \ (i = 1,...,n).$$

Следовательно, согласно теореме 4.1, $\Phi \in H$. Кроме того,

$$L_E\sqrt{\mu_i} = \frac{1}{2}(\mu_i)^{-\frac{1}{2}} L_E \mu_i = \frac{1}{2}(\mu_i)^{-\frac{1}{2}} m\mu_i = \frac{m}{2}\sqrt{\mu_i},$$

и, согласно теореме 5.1

$$V\Phi = L_E\Phi = \frac{m}{2}\Phi.$$

□

Для векторов $a = (a_1, ..., a_n),\ b = (b_1, ..., b_n) \in K^n$ положим

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

В частности, две вектор-функции

$$\psi^\alpha = \begin{pmatrix} \psi_1^\alpha \\ \dots \\ \psi_n^\alpha \end{pmatrix} \text{ и } \psi^\beta = \begin{pmatrix} \psi_1^\beta \\ \dots \\ \psi_n^\beta \end{pmatrix}$$

порождают функцию

$$(\psi^\alpha, \psi^\beta) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i^\alpha \psi_i^\beta.$$

Определение 5.2. *Плоскую однородную фробениусову структуру назовем диагонализуемой, если диагонализуема построенная по ней матрица V диаганализуема.*

Согласно теореме 5.1 плоская однородная фробениусова структура на многообразии M диагонализуема, если матрица V диаганализуема хотя бы в одной точке $x_0 \in M$.

Теорема 5.2. *Пусть матрица V, отвечает диагонализуемой плоской однородной фробениусовой структуре на M. Тогда существует содержащий вектор Φ базис $(\psi^1, ..., \psi^n)$ пространства H такой, что*

$$V\psi^\alpha = \lambda_\alpha \psi^\alpha \ (\lambda_\alpha = const),$$

$$(\psi^\alpha, \psi^\beta) = \delta_{\alpha+\beta,n+1},\ \ \lambda_\alpha + \lambda_{n+1-\alpha} = 0.$$

Proof. Пусть базис $\psi^1, ..., \psi^n \in H$ такой, что

$$V(x_0)\psi^\alpha(x_0) = \lambda_\alpha \psi^\alpha(x_0).$$

Согласно лемме 5.3 можно считать, что $\Phi \in (\psi^1, ..., \psi^n)$. Согласно теореме 5.1 $V\psi^\alpha = \lambda_\alpha\psi^\alpha$. Матрица V антисимметрична и, следовательно,

$$\lambda_\alpha(\psi^\alpha, \psi^\beta) = (V\psi^\alpha, \psi^\beta) = -(\psi^\alpha, V\psi^\beta) = -\lambda_\beta(\psi^\alpha, \psi^\beta).$$

Таким образом, если $(\psi^\alpha, \psi^\beta) \neq 0$, то $\lambda_\alpha + \lambda_\beta = 0$. Ввиду невырожденности скалярного произведения отсюда следует, что векторы $\psi^1(x_0), ..., \psi^n(x_0)$ можно занумеровать собственные значения $\lambda_1, ..., \lambda_n$ так, чтобы $\lambda_\alpha + \lambda_{n+1-\alpha} = 0$ и $(\psi^\alpha, \psi^\beta) = \sigma_\alpha \delta_{\alpha,n+1-\beta}$, где $\sigma_\alpha^{(\alpha)} \neq 0$. Заменим теперь ψ^α на $\psi^\alpha/\sqrt{\sigma_\alpha}$. □

6. Потенциал

В этом разделе мы построим функцию, порождающую структуру Дубровина.

Определение 6.1. *Пусть — область в многообразии M с плоской однородной фробениусовой структурой. Координаты $(t^1, ..., t^n) : U \to \mathbb{K}^n$ в области $U \subset M$ называются плоскими квазиоднородными, если*

$$g = \sum_{\alpha,\beta} \delta_{\alpha+\beta,n+1} dt^\alpha \otimes dt^\beta,$$

$$e = \frac{\partial}{\partial t^\epsilon},$$

$$E = \sum_{\alpha=1}^n (d_\alpha t^\alpha + r_\alpha)\frac{\partial}{\partial t^\alpha},$$

где $d_\epsilon = 1$, d_α и $r_\alpha = const$, $d_\alpha r_\alpha = 0$. Числа $d_1, ..., d_n$ называются степенями многообразия.

Теорема 6.1. *Многообразии с плоской однородной диагонализуемой фробениусовой структурой имеет плоские квазиоднородные координаты в окрестности каждой точки $x_0 \in M$. При этом $\lambda_\alpha = \frac{m}{2} - d_\alpha + 1$ — собственные значения матрицы $V(x_0)$.*

Proof. Пусть $(\psi^1, ..., \psi^n) \in H$ — базис из собственных векторов оператора V (теорема 5.2) и $\psi^\epsilon = \Phi$. Согласно теореме 4.1,

$$\partial_j(\sqrt{\mu_i}\psi_i^\alpha) = \partial_j(\sqrt{\mu_i})\psi_i^\alpha + \sqrt{\mu_i}\partial_j\psi_i^\alpha = \sqrt{\mu_j}\gamma_{ij}\psi_i^\alpha + \sqrt{\mu_i}\gamma_{ij}\psi_j^\alpha = \partial_i(\sqrt{\mu_j}\psi_j^\alpha).$$

Следовательно, согласно лемме Пуанкаре существуют окрестность $U \ni x_0$ и функция $t^{n+1-\alpha} : U \to \mathbb{K}$ такие, что $\partial_i t^{n+1-\alpha} = \sqrt{\mu_i}\psi_i^\alpha = \Phi_i\psi_i^\alpha$. Согласно теореме 5.2 векторы $\psi^1(x), ..., \psi^n(x)$ линейно независимы при каждом $x \in U$. Поэтому функции $(t^1, ..., t^n)$ образуют координаты на U.

Пусть $\eta_{\alpha\beta} = g(\partial/\partial t^\alpha, \partial/\partial t^\beta)$. Тогда

$$g = \sum_{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta} dt^\alpha \otimes dt^\beta = \sum_{ij} g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

где $g_{ij} = \mu_i\delta_{ij}$. Положим

$$\hat{g} = \sum_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial t^\beta} = \sum_{ij} g^{ij}\partial_i \otimes \partial_j,$$

где $(\eta^{\alpha\beta})$ и (g^{ij}) — матрицы, обратные к $(\eta_{\alpha\beta})$ и (g_{ij}).

Тогда

$$\eta^{\alpha\beta} = \hat{g}(dt^\alpha \otimes dt^\beta) = \sum_{ij} \partial_i t^\alpha \partial_j t^\beta g^{ij} = \sum_{ij} \sqrt{\mu_i}\psi_i^{n+1-\alpha}\sqrt{\mu_j}\psi_j^{n+1-\beta}\frac{\delta_{ij}}{\mu_i} =$$

$$= \sum_i \psi_i^{n+1-\alpha}\psi_i^{n+1-\beta} = (\psi^{n+1-\alpha}, \psi^{n+1-\beta}) = \delta_{(n+1-\alpha)+(n+1-\beta),n+1} = \delta_{\alpha+\beta,n+1}.$$

Следовательно, $\eta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha+\beta,n+1}$ и $g = \sum \delta_{\alpha+\beta,n+1} dt^\alpha \otimes dt^\beta$.

Пусть

$$e = \sum_\alpha \rho_\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}.$$

Тогда

$$\delta_{\beta,n+1-\epsilon} = dt^{n+1-\epsilon}\Big(\frac{\partial}{\partial t^\beta}\Big) = \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial t^{n+1-\epsilon}}{\partial x^i} dx^i\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial t^\beta}\Big) =$$

$$\Big(\sum_{i=1}^n \sqrt{\mu_i}\Phi_i dx^i\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial t^\beta}\Big) = \Big(\sum_{i=1}^n \mu_i dx^i\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial t^\beta}\Big) = \theta\Big(\frac{\partial}{\partial t^\beta}\Big) =$$

$$= g\Big(e, \frac{\partial}{\partial t^\beta}\Big) = g\Big(\sum_\alpha \rho_\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}, \frac{\partial}{\partial t^\beta}\Big) = \sum_\alpha \rho_\alpha g\Big(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}, \frac{\partial}{\partial t^\beta}\Big) =$$

$$\sum_\alpha \rho_\alpha \delta_{\alpha+\beta,n+1} = \rho_{n+1-\beta}.$$

Следовательно, $\rho_\beta = \delta_{n+1-\beta,n+1-\epsilon} = \delta_{\beta,\epsilon}$ и $e = \partial/\partial t^\epsilon$.

Пусть

$$E = \sum_{i=1}^n x^i \partial_i = \sum_{\alpha=1}^n E^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}.$$

Тогда

$$E^\alpha = \sum_{i=1}^n x^i \partial_i t^\alpha.$$

Таким образом, согласно лемме 5.3 и теореме 5.2

$$\partial_i(E^\alpha) = \partial_i\Big(\sum_j x^j \partial_j t^\alpha\Big) =$$

$$= \partial_i t^\alpha + \sum_j x^j \partial_j \partial_i t^\alpha = \Phi_i \psi_i^{n+1-\alpha} + L_E(\Phi_i \psi^{n+1-\alpha}) =$$

$$= \Phi_i \psi_i^{n+1-\alpha} + (L_E \Phi_i)\psi_i^{n+1-\alpha} + \Phi_i(L_E \psi_i^{n+1-\alpha}) =$$

$$= \Phi_i \psi_i^{n+1-\alpha} + \frac{m}{2}\Phi_i \psi_i^{n+1-\alpha} + \lambda_{n+1-\alpha}\Phi_i \psi_i^{n+1-\alpha} = (1 + \frac{m}{2} - \lambda_\alpha)\partial_i t^\alpha.$$

Следовательно, $E^\alpha = d_\alpha t^\alpha + r_\alpha$, где $d_\alpha = 1 + \frac{m}{2} - \lambda_\alpha$ и $r_\alpha = \mathrm{const}$. Если $d_\alpha \neq 0$, то замена $t^\alpha \mapsto t^\alpha - r_\alpha/d_\alpha$ переводит r_α в 0.

Согласно лемме 5.1,

$$\frac{\partial}{\partial t^\epsilon} = e = -L_E e = -L_{(\sum_\alpha (d_\alpha t^\alpha + r_\alpha)\frac{\partial}{\partial t^\alpha})}\Big(\frac{\partial}{\partial t^\epsilon}\Big) = d_\epsilon \frac{\partial}{\partial t^\epsilon},$$

то есть $d_\epsilon = 1$ $\square$

Следствие 6.1. *Плоская плоская однородная диагонализуемая фробениусова структура является структурой Дубровина.*

Задача 6.1. *Структура Дубровина является плоской однородной диагонализуемой фробениусовой структурой.*

Определение 6.2. *Пусть $(t^1,...,t^n)$ — плоские квазиоднородные координаты в $U \subset M$. Функции $F(t^1,...,t^n)$ называется потенциалом структуры Дубровина, если*

$$\theta(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial t^\beta}\cdot\frac{\partial}{\partial t^\gamma}) = \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma}.$$

Теорема 6.2. *При любом выборе плоских квазиоднородных координат $(t^1,...,t^n)$ в $U \ni x_0$ существует область $x_0 \in \widetilde{U} \subset U$, на которой структура обладает потенциалом $F(t^1,...,t^n)$.*

Proof. Положим

$$c_{\alpha\beta\gamma} = \theta(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial t^\beta}\cdot\frac{\partial}{\partial t^\gamma})$$

и рассмотрим тензор

$$c = \sum_{\alpha\beta\gamma} c_{\alpha\beta\gamma} dt^\alpha \otimes dt^\beta \otimes dt^\gamma.$$

Поскольку координаты $(t^1,...,t^n)$ плоские, то

$$\frac{\partial c_{\alpha\beta\gamma}}{\partial t^\eta} = \frac{\partial(c(\frac{\partial}{\partial t^\alpha},\frac{\partial}{\partial t^\beta},\frac{\partial}{\partial t^\gamma}))}{\partial t^\eta} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t^\eta}} c(\frac{\partial}{\partial t^\alpha},\frac{\partial}{\partial t^\beta},\frac{\partial}{\partial t^\gamma}) = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t^\eta}} c)(\frac{\partial}{\partial t^\alpha},\frac{\partial}{\partial t^\beta},\frac{\partial}{\partial t^\gamma})$$

Следовательно, согласно теореме 3.1

$$\frac{\partial c_{\alpha\beta\gamma}}{\partial t^\eta} = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t^\eta}} c)(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial t^\beta}\cdot\frac{\partial}{\partial t^\gamma}) = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t^\gamma}} c)(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial t^\beta}\cdot\frac{\partial}{\partial t^\eta}) = \frac{\partial c_{\alpha\beta\eta}}{\partial t^\gamma}.$$

Поэтому согласно лемме Пуанкаре в области $x_0 \in U' \subset U$ существует функция $\widetilde{b}_{\alpha\beta}$ такая, что

$$c_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial \widetilde{b}_{\alpha\beta}}{\partial t^\gamma}.$$

Положим

$$b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\widetilde{b}_{\alpha\beta} + \widetilde{b}_{\beta\alpha}).$$

Тогда

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial t^\gamma} = \frac{1}{2}(c_{\alpha\beta\gamma} + c_{\beta\alpha\gamma}) = c_{\alpha\beta\gamma}$$

и

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial t^\gamma} = c_{\alpha\beta\gamma} = c_{\alpha\gamma\beta} = \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial t^\beta}.$$

Таким образом, согласно лемме Пуанкаре в области $x_0 \in U'' \subset U'$ существует функция a_α такая, что

$$b_{\alpha\beta} = \partial a_\alpha / \partial t^\beta.$$

Следовательно,

$$\partial a_\alpha/\partial t^\beta = b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = \partial a_\beta/\partial t^\alpha$$

и, согласно лемме Пуанкаре в некоторой области $x_0 \in \widetilde{U} \subset U''$ существует функция F такая, что

$$a_\alpha = \partial F / \partial t^\alpha.$$

Но тогда

$$c_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma}.$$

$\square$

7. Уравнения WDVV

В предыдущем разделе мы сопоставили структуре Дубровина на многообразии размерности n некоторую функцию от n переменных, которую Дубровин назвал потенциалом. В этом разделе мы докажем, что потенциал однозначно определяет структуру Дубровина. Более того, мы докажем, что множество потенциалов совпадает с множеством решений системы дифференциальных уравнений, которую Дубровин назвал WDVV, поскольку эти уравнения впервые появились в работах Witten, Duijkgraaf, E.Verlinde и H.Verlinde для описания пространств модулей топологических теорий поля.

Определение 7.1. *Пусть на области $U \subset \mathbb{K}^n = \{(t^1,...,t^n)\}$ задана функцией $F(t^1,...,t^n)$ и векторное поле $E = \sum\limits_{\alpha}(d_\alpha t^\alpha + r_\alpha)(\partial/\partial t^\alpha)$ такое, что $d_\alpha + d_{n+1-\alpha} = m+2$, $d_\alpha \cdot r_\alpha = 0$, $d_\epsilon = 1$. Говорят, что пара (F,E) удовлетворяет WDVV иерархии, если:*

1)

$$\sum_{\eta=1} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\eta} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial t^\gamma \partial t^\delta \partial t^{n+1-\eta}} = \sum_{\eta=1}^{n} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\gamma \partial t^\beta \partial t^\eta} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\delta \partial t^{n+1-\eta}}$$

(уравнение ассоциативности);

2)

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t^\epsilon \partial t^\alpha \partial t^\beta} = \delta_{\alpha+\beta,n+1}$$

(условие нормализации);

3)

$$L_E F = (m+3)F + \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta + \sum_{\alpha} B_\alpha t^\alpha + C,$$

где $A_{\alpha\beta}, B_\alpha, C = const$ (уравнения однородности).

Теорема 7.1. *Пусть M — многообразие со структурой Дубровина и $(t^1,...,t^n)$ — плоские квазиоднородные координаты на $U \subset M$. Пусть*

$$E = \sum_{\alpha=1}^{n} (d_\alpha t^\alpha + r_\alpha) \frac{\partial}{\partial t^\alpha}$$

— эйлерово поле и $F(t^1,...,t^n)$ — его потенциал. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\beta} = \sum_{\gamma} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^{n+1-\eta}} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\gamma}$$

и (F,E) удовлетворяет уравнениям WDVV.

Proof. Положим $c_{\alpha\beta\gamma} = \partial^3 F/\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma$ и $c = \sum\limits_{\alpha,\beta,\gamma} c_{\alpha\beta\gamma} dt^\alpha \otimes dt^\beta \otimes dt^\gamma$. Тогда, согласно лемме 1.1,

$$\frac{\partial}{\partial t^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\beta} = g^{-1} c(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}, \frac{\partial}{\partial t^\beta}) = \sum_{\gamma\eta} g^{\gamma\eta} c_{\alpha\beta\eta} \frac{\partial}{\partial t^\gamma},$$

где $(g^{\gamma\eta}) = (g_{\gamma\eta})^{-1} = (\delta_{\gamma+\eta,n+1})^{-1} = (\delta_{\gamma+\eta,n+1})$. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial t^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\beta} = \sum_{\gamma} c_{\alpha\beta(n+1-\gamma)} \frac{\partial}{\partial t^\gamma} = \sum_{\gamma} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^{n+1-\gamma}} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\gamma}$$

и

$$\sum_{\delta=1}^{n}\sum_{\eta=1}^{n}\frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\eta}\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial t^\gamma \partial t^\delta \partial t^{n+1-\eta}}\cdot\frac{\partial}{\partial t^{n+1-\delta}} =$$

$$= \sum_{\eta=1}^{n}\frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\eta}(\frac{\partial}{\partial t^{n+1-\eta}}\cdot\frac{\partial}{\partial t^\gamma}) = (\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial t^\beta})\cdot\frac{\partial}{\partial t^\gamma} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\cdot(\frac{\partial}{\partial t^\beta}\cdot\frac{\partial}{\partial t^\gamma}) = \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\cdot(\sum_\eta \frac{\partial^3 F}{\partial t^\beta \partial t^\gamma \partial t^\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial t^{n+1-\eta}}) =$$

$$= \sum_\eta\sum_\delta \frac{\partial^3 F}{\partial t^\beta \partial t^\gamma \partial t^\eta}\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^{n+1-\eta} \partial t^\delta}\cdot\frac{\partial}{\partial t^{n+1-\delta}}.$$

По определению

$$\delta_{\alpha+\beta,n+1} = g(\frac{\partial}{\partial t^\alpha},\frac{\partial}{\partial t^\beta}) = \theta(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial t^\beta}) = \theta(\frac{\partial}{\partial t^\epsilon}\cdot\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial t^\beta}) = \frac{\partial^3 F}{\partial t^\epsilon \partial t^\alpha \partial t^\beta}.$$

Рассмотрим $L_E F = \sum\limits_\eta (d_\eta t^\eta + r_\eta)(\partial F/\partial t^\eta)$. Тогда

$$\frac{\partial^3 (L_E F)}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma} = \sum_\eta (d_\eta t^\eta + r_\eta)\frac{\partial^4 F}{\partial t^\eta \partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma} + (d_\alpha + d_\beta + d_\gamma)\frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma} =$$

$$= L_E c_{\alpha\beta\gamma} + (d_\alpha + d_\beta + d_\gamma)c_{\alpha\beta\gamma}.$$

Согласно лемме 5.1, $L_E c = (m+3)c$, откуда

$$L_E c_{\alpha\beta\gamma} + (d_\alpha + d_\beta + d_\gamma)c_{\alpha\beta\gamma} = (m+3)c_{\alpha\beta\gamma}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^3 L_E F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma} = (m+3)\frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma}$$

и, значит,

$$L_E F = (m+3)F + \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta + \sum_\alpha B_\alpha t^\alpha + C,$$

где $A_{\alpha\beta}, b_\alpha, C = \mathrm{const}$. $\square$

Теорема 7.2. *Пусть (F,E) — решение уравнений WDVV на*

$$\widetilde{U} = \{(t^1,...,t^n)\} \subset \mathbb{K}^n.$$

Положим

$$\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial t^\beta} = \sum_\eta \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^{n+1-\eta}}\cdot\frac{\partial}{\partial t^\eta}$$

и

$$g(\frac{\partial}{\partial t^\alpha},\frac{\partial}{\partial t^\beta}) = \delta_{\alpha+\beta,n+1}.$$

Тогда эти операции задают на $T_t\widetilde{U}$ $(t \in \widetilde{U})$ структуру алгебры Фробениуса. Более того, на подмножестве $U \subset \widetilde{U}$, где эти алгебры полупросты, эти операции *порождают структуру Дубровина с плоскими квазиоднородными координатами* $(t^1, ..., t^n)$*, потенциалом* F*, эйлеровым полем* E *и полем единиц* $e = \partial/\partial t^\epsilon$*.*

Proof. Пусть $t \in \widetilde{U}$. Операция $(\cdot)$ порождает на T_tU структуру коммутативной алгебры. Ее ассоциативность следует из аксиомы "уравнения ассоциативности". Кроме того,

$$g(\frac{\partial}{\partial t^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\beta}, \frac{\partial}{\partial t^\gamma}) = \sum_\eta \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^{n+1-\eta}} g(\frac{\partial}{\partial t^\eta}, \frac{\partial}{\partial t^\gamma}) =$$

$$= \sum_\eta \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^{n+1-\eta}} \delta_{\eta+\gamma,n+1} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma} = g(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}, \frac{\partial}{\partial t^\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\gamma}).$$

Таким образом, $T_t\widetilde{U}$ является фробениусовой алгеброй.

Положим

$$c_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma}, \ c = \sum_{\alpha\beta\gamma} c_{\alpha\beta\gamma} dt^\alpha \otimes dt^\beta \otimes dt^\gamma \quad \text{и} \quad \gamma = \nabla c$$

. Координаты $(t^\alpha, ..., t^n)$ являются плоскими в метрике g и, следовательно,

$$\gamma\Big(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}, \frac{\partial}{\partial t^\beta}, \frac{\partial}{\partial t^\gamma}, \frac{\partial}{\partial t^\eta}\Big) = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t^\eta}} c)\Big(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}, \frac{\partial}{\partial t^\beta}, \frac{\partial}{\partial t^\gamma}\Big) = \frac{\partial}{\partial t^\eta} c_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^4 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma \partial t^\eta}.$$

Таким образом, тензор γ симметричен относительно всех 4 переменных и согласно теореме 3.1 операции $(\cdot)$ и g задают на U фробениусову структуру. Ее поле единиц совпадает с $e = \partial/\partial t^\epsilon$, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial t^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\epsilon} = \sum_\eta \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\epsilon \partial t^{n+1-\eta}} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\eta} = \sum_\eta \delta_{\alpha+n+1-\eta,n+1} \frac{\partial}{\partial t^\eta} = \frac{\partial}{\partial t^\alpha}$$

Таким образом, $\nabla e = \nabla(\partial/\partial t^\epsilon) = 0$.

Условие $\nabla\nabla E = 0$ очевидно.

Осталось доказать, что в канонических координатах $(x^1, ..., x^n)$ поле E имеет $E = \sum_{i=1}^n x^i(\partial/\partial x^i)$ и $L_E\mu_i = m\mu_i$ для $g = \sum_{i=1}^n \mu_i dx^i \otimes x^i$.

Рассмотрим тензор

$$L_E c = \sum_{\alpha\beta\gamma} (L_E c)_{\alpha\beta\gamma} dt^\alpha \otimes dt^\beta \otimes dt^\gamma.$$

Использую уравнение однородности,

$$L_E F = (m+3)F + \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta + \sum_\alpha B_\alpha t^\alpha + C,$$

находим, что

$$(L_E c)_{\alpha\beta\gamma} = \sum_\delta (d_\delta t^\delta + r_\alpha) \frac{\partial^4 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma \partial t^\eta} + (d_\alpha + d_\beta + d_\gamma) \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma} =$$

$$= \frac{\partial^3 (L_E F)}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma} = (m+3) c_{\alpha\beta\gamma},$$

то есть $L_E c = (m+3)c$.

Рассмотрим теперь тензор $g^{-1}=\sum\limits_{\alpha\beta}\delta^{\alpha+\beta,n+1}\partial t^\alpha\otimes\partial t^\beta$. Тогда

$$L_E g^{-1}=\Big(\sum_{\alpha\beta}L_E g\Big)^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\otimes\frac{\partial}{\partial t^\beta},$$

где

$$(L_E g)^{\alpha\beta}=-(d_\alpha+d_\beta)g^{\alpha\beta}=-\delta^{\alpha+\beta,n+1}(d_\alpha+d_\beta)=-(m+2)g^{\alpha\beta}.$$

Следовательно, $L_E g^{-1}=-(m+2)g^{-1}$ и

$$L_E(g^{-1}c)=L_E(g^{-1})c+g^{-1}L_E(c)=[-(m+2)+(m+3)]g^{-1}c=g^{-1}c.$$

Кроме того, согласно лемме 2.1, $a\cdot b=g^{-1}c(a\otimes b)$ и

$$L_E(a\cdot b)=L_E(g^{-1}c(a\otimes b))=L_E(g^{-1}c)(a\otimes b)+g^{-1}c(L_E(a\otimes b))=$$

$$=g^{-1}c(a\otimes b)+g^{-1}c(L_Ea\otimes b)+g^{-1}c(a\otimes L_Eb)=a\cdot b+L_Ea\cdot b+a\cdot L_Eb.$$

Пусть теперь $x^1,...,x^n$ — канонические координаты и $\partial_i=\partial/\partial x^i$. Тогда

$$L_E(\partial_i)=L_E(\partial_i\cdot\partial_i)=\partial_i\cdot\partial_i+2L_E(\partial_i)\cdot\partial_i$$

и, следовательно,

$$L_E(\partial_i)\cdot\partial_i=\partial_i+2L_E(\partial_i)\cdot\partial_i.$$

Таким образом,

$$L_E(\partial_i)\cdot\partial_i=-\partial_i$$

откуда

$$L_E(\partial_i)=\partial_i\cdot\partial_i-2\partial_i=-\partial_i.$$

С другой стороны,

$$L_{(\sum\limits_{i=1}^k x^i\partial_i)}(\partial_i)=-\partial_i.$$

Таким образом,

$$L_E=L_{\sum\limits_i x^i\partial_i},$$

откуда

$$E=\sum_i(x^i+q_i)\frac{\partial}{\partial(x^i+q_i)},\quad\text{где}\quad q_i=\mathrm{const}.$$

В частности,

$$L_{(\sum\limits_i(x^i+q_i)\partial_i)}g=L_Eg=L_{(\sum\limits_i(d_it^i+r_i)\frac{\partial}{\partial t^i})}\Big(\sum_{\alpha,\beta}\delta^{\alpha+\beta,n+1}dt^\alpha\otimes dt^\beta\Big)=$$

$$\sum_{\alpha,\beta}(d_\alpha+d_\beta)\delta^{\alpha+\beta,n+1}dt^\alpha\otimes dt^\beta=(m+2)g.$$

Для $g=\sum\limits_i\mu_idx^i\otimes dx^i$ это условие эквивалентно $L_E\mu_i=m\mu_i$. Таким образом, координаты (x^i+q_i) являются однородными. $\square$

8. Простейшие решения уравнений WDVV

Пусть F — решение WDVV в связной области $M \subset \mathbb{K}^n$. Рассмотрим структуру Дубровина $\{(M_x, \theta_x) | x \in M\}$, которую оно определяет. Тогда $\nabla e = \nabla(\theta) = 0$ и, значит, $\nabla(\theta(e)) = 0$, т.е. $\theta(e) = \text{const}$.

Задача 8.1. *Доказать, что $\theta(e) \neq 0$, то $m = 0$.*

В приложениях обычно $\theta(e) = 0$, поэтому далее, если не оговорено противное, мы считаем, что $\theta(e) = 0$.

Пусть $(t^1, ..., t^n)$ — плоские квазиоднородные координаты и $e = \partial/\partial t^\epsilon$. Тогда

$$\delta_{n+1-\epsilon,\epsilon} = g\big(\frac{\partial}{\partial t^\epsilon}, \frac{\partial}{\partial t^\epsilon}\big) = \theta(e) = 0$$

и, следовательно, $n + 1 - \epsilon \neq \epsilon$. Таким образом, существует сохраняющая условие $d_\alpha + d_{n+1-\alpha} = m + 2$ перенумерация t^i такая, что $\epsilon = 1$ и $e = \partial/\partial t^1$. В этом случае условие нормировки $\partial^3 F/\partial t^1 \partial t^\alpha \partial t^\beta = \delta_{\alpha+\beta,n+1}$ дает

$$F(t^1, ..., t^n) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^n + \frac{1}{2} t^1 \sum_{\alpha=2}^{n-1} t^\alpha t^{n+1-\alpha} + f(t^2, ..., t^n).$$

Задача 8.2. *Доказать, что если $\theta(e) \neq 0$, то существует перенумерация t^i такая, что*

$$F = c(t^1)^3 + \frac{1}{2} t^1 \sum_{\alpha=2}^{n} t^\alpha t^{n+2-\alpha} + f(t^2, ..., t^n).$$

Рассмотрим случай $n = 2$. Тогда

$$F(t^1, t^2) = (t^1)^2 t^2/2 + f(t^2).$$

Теорема 8.1. *Существует ровно 5 структур Дубровина размерности 2 с $\theta(e) = 0$. Они определяются парами (F, E):*

$$1) F(t^1, t^2) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 + a(t^2)^{(m+3)/(m+1)} + \alpha(t^2)^2 + \beta t^2 + \gamma,$$

$$E = t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + (m+1) t^2 \frac{\partial}{\partial t^2} \quad (m \neq -1, 1, 3);$$

$$2) F(t^1, t^2) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 + c \ln t^2 + \alpha(t^2)^2 + \beta t^2 + \gamma,$$

$$E = t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} - 2t^2 \frac{\partial}{\partial t^2};$$

$$3) F(t^1, t^2) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 + c(t^2)^2 \ln t^2 + \alpha(t^2)^2 + \beta t^2 + \gamma,$$

$$E = t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + 2t^2 \frac{\partial}{\partial t^2};$$

$$4) F(t^1, t^2) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^2 + e^{\frac{2}{r} t^2} + \alpha(t^2)^2 + \beta t^2 + \gamma,$$

$$E = t^1\frac{\partial}{\partial t^1} + r\frac{\partial}{\partial t^2};$$

$$5) F(t^1, t^2) = \frac{1}{2}(t^1)^2t^2 + \alpha(t^2)^2 + \beta t^2 + \gamma,$$

$$E = t^1\frac{\partial}{\partial t^1}.$$

Proof. При $n = 2$, уравнение ассоциативности дает только одно уравнение

$$\sum_{\eta=1,2} \frac{\partial^3 F}{\partial t^1\partial t^1\partial t^\eta} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial t^2\partial t^2\partial t^{n+1-\eta}} = \sum_{\eta=1,2} \frac{\partial^3 F}{\partial t^2\partial t^1\partial t^\eta} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial t^1\partial t^2\partial t^{n+1-\eta}},$$

которое всегда выполнено. Осталось удовлетворить уравнению однородности. Рассмотрим два случая: 1) $m \neq -1$ и 2) $m = -1$.

Случай 1. Пусть $m \neq -1$. Тогда $d_1 = 1, d_2 = m + 2 - d_1 = m + 1 \neq 0$, и

$$E = t^1\frac{\partial}{\partial t^1} + (m+1)t^2\frac{\partial}{\partial t^2}.$$

Уравнение однородности дает

$$(m+3)(\frac{1}{2}(t^1)^2t^2 + f(t^2)) + \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta + \sum_\alpha B_\alpha t^\alpha + C =$$

$$L_{(t^1\frac{\partial}{\partial t^1}+(m+1)t^2\frac{\partial}{\partial t^2})}(\frac{1}{2}(t^1)^2t^2 + f(t^2)) = (t^1)^2t^2 + \frac{1}{2}(m+1)(t^1)^2t^2 + (m+1)t^2f'(t^2).$$

Следовательно,

$$(m+1)t^2f'(t^2) - (m+3)f(t^2) = \sum_{\alpha\beta=1,2} A_{\alpha\beta}t^\alpha\alpha t^\beta + \sum_\alpha B_\alpha t^\alpha + C.$$

Таким образом, мы должны найти все решения уравнения

$$(m+1)xf'(x) - (m+3)f(x) = ax^2 + bx + c$$

для всех $a, b, c = \mathrm{const}$.

- Если $m = -3$, то
  $-2xf'(x) = ax^2 + bx + c$ и $f(x) = c\ln x + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$;
- Если $m = 1$, то
  $2xf'(x) - 4f(x) = ax^2 + bx + c$ и $f(x) = cx^2\ln x + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$;
- Если $m \neq -3, 1$, то
  $f(x) = ax^{\frac{m+3}{m+1}} + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Случай 2. Пусть $m = -1$. Тогда $d_2 = (m+2) - d_1 = 0$ и

$$E = t^1(\partial/\partial t^1) + r(\partial/\partial t^2).$$

Таким образом, уравнение однородности дает

$$2(\frac{1}{2}(t^1)^2t^2 + f(t^2)) + \sum_{\alpha\beta=1,2} A_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta + \sum_{\alpha=1,2} B_\alpha t^\alpha + C =$$

$$L_{(t^1\frac{\partial}{\partial t^1}+r\frac{\partial}{\partial t^2})}(\frac{1}{2}(t^1)^2t^2 + f(t^2)) = (t^1)^2t^2 + \frac{r}{2}(t^1)^2 + rf'(t^2).$$

Следовательно, мы имеем уравнение

$$rf'(t^2) - 2f(t^2) = \sum_{\alpha\beta=1,2} A_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta + \sum_{\alpha=1,2} B_\alpha t^\alpha + C - \frac{r}{2}(t^1)^2,$$

то есть $rf'(x) - 2f(x) = \alpha x^2 + bx + c$.

- Если $r = 0$, то $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + c$.
- Если $r \neq 0$, то $f(x) = e^{\frac{2}{r}x} + \alpha x^2 + \beta x + c$.

□

Задача 8.3. *Сформулировать и доказать аналогичную теорему для случая* $\theta(e) \neq 0$.

Рассмотрим теперь случай $n = 3$. Тогда

$$F(t^1, t^2, t^3) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^3 + \frac{1}{2}(t^1)(t^2)^2 + f(t^2, t^3).$$

В приложениях особенно важны полиномиальные решения.

Теорема 8.2. *Существует ровно 3 типа структур Дубровина размерности 3 с полиномиальным потенциалом, с* $\theta(e) = 0$ *и с показателями* $d_i \neq 0$. *Они определяются парами* (F, E)*:*

$$1) F = \frac{(t^1)^2 t^3 + t^1 (t^2)^2}{2} + a(t^2)^2 (t^3)^2 + \frac{16}{60} a^2 (t^3)^5,$$
$$E = t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + \frac{3}{4} t^2 \frac{\partial}{\partial t^2} + \frac{1}{2} t^3 \frac{\partial}{\partial t^3};$$

$$2) F = \frac{(t^1)^2 t^3 + t^1 (t^2)^2}{2} + a(t^2)^3 t^3 + 6a^2 (t^2)^2 (t^3)^3 + \frac{1296}{210} a^4 (t^3)^7,$$
$$E = t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + \frac{2}{3} t^2 \frac{\partial}{\partial t^2} + \frac{1}{3} t^3 \frac{\partial}{\partial t^3};$$

$$3) F = \frac{(t^1)^2 t^3 + t^1 (t^2)^2}{2} + a(t^2)^3 (t^3)^2 + \frac{36}{20} a^2 (t^2)^2 (t^3)^5 + \frac{1296}{3960} a^4 (t^3)^{11},$$
$$E = t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + \frac{3}{5} t^2 \frac{\partial}{\partial t^2} + \frac{1}{5} t^3 \frac{\partial}{\partial t^3}.$$

Proof. Ввиду $d_2, d_3 \neq 0$ и $2d_2 = d_3 + 1 = m + 2$ мы имеем

$$E = t^1 \frac{\partial}{\partial t^1} + \frac{m+2}{2} t^2 \frac{\partial}{\partial t^2} + (m+1) t^3 \frac{\partial}{\partial t^3},$$

где $m \neq -1, -2$.

Уравнения ассоциативности дают только одно нетривиальное уравнение

$$\sum_{\eta=1}^{3} \frac{\partial^3 F}{\partial t^2 \partial t^3 \partial t^\eta} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial t^3 \partial t^2 \partial t^{n+1-\eta}} = \sum_{\eta=1}^{3} \frac{\partial^3 F}{\partial t^3 \partial t^3 \partial t^\eta} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial t^2 \partial t^2 \partial t^{n+1-\eta}},$$

которое эквивалентно

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial t^2 \partial t^3}\right)^2 = \frac{\partial^3 f}{\partial t^3 \partial t^3 \partial t^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial t^2 \partial t^2} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial t^3 \partial t^3}.$$

Положим $x = t^2,\ y = t^3$, тогда $f_{xxy}^2 = f_{yyy} + f_{xxx}f_{xyy}$.

Уравнение однородности $L_E F = (m+3)F + P$ дает

$$\frac{m+2}{2}xf_x + (m+1)yf_y = (m+3)f + \varphi(x,y),$$

где $\varphi(x,y)$ — квадратичная форма от x, y. (Можно доказать, что это уравнение эквивалентно уравнению Пенлеве VI.)

Пусть теперь $f(x,y) = \sum a_{pq}x^p y^q$. Тогда условие однородности дает

$$\frac{m+2}{2}x\sum pa_{pq}x^{p-1}y^q + (m+1)y\sum qa_{pq}x^p y^{q-1} = (m+3)\sum a_{pq}x^p y^q + \varphi$$

и, следовательно, $\frac{m+2}{2}pa_{pq} + (m+1)qa_{pq} = (m+3)a_{pq}$, откуда

$$m = -2\frac{p+q-3}{p+2q-2}.$$

В месте с ограничениями $p+q > 2$, $d_i > 0$ это дает представление числа m в одном из следующих двух видах.

$$1) m = (2s-n)/(n-s),\ s, n \in \mathbb{Z} \geq 0, n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2).$$

$$2) m = (2s-2n)/(2n-s),\ s, n \in \mathbb{Z} \geq 0, n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2).$$

Случай 1. Пусть $m = (2s-n)/(n-s)$. Тогда

$$q = \frac{m+3}{m+1} - \frac{m+2}{2m+2}p = \frac{\frac{2s-n}{n-s}+3}{\frac{2s-n}{n-s}+1} - \frac{\frac{2s-n}{n-s}+2}{2\frac{2s-n}{n-s}+2} = \frac{2n-s}{s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{s}p$$

и, следовательно,

$$q+1 = 2\frac{n}{s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{s}p.$$

Положим $k = (q+1)/n$. Тогда $q = kn-1$ и $p = 4-2ks$. Следовательно,

$$f(x,y) = \sum_k a_k x^{4-2ks}y^{kn-1}.$$

Условия $m \neq -1,\ kn-1 \geq 0$ и $4-2ks \geq 0$ дают $s > 0, k > 0, s \leq 2$. Таким образом, имеются только 2 возможности:

$$s = 1,\ f(x,y) = a_1x^2y^{n-1} - a_2y^{2n-1} \text{ и } s = 2,\ f = a_1y^{n-1}.$$

Случай 2. Пусть

$$m = \frac{2(s-n)}{2n-s}.$$

Тогда

$$q = \frac{m+3}{m+1} - \frac{m+2}{2m+2}p = \frac{\frac{2(s-n)}{n-s}+3}{\frac{2(s-n)}{n-s}+1} - \frac{1}{2}\frac{\frac{2(s-n)}{n-s}+2}{\frac{2(s-n)}{2n-s}+1} = \frac{4n-s}{s} - \frac{n}{s}p$$

и, следовательно,

$$q+1 = \frac{4n}{s} - \frac{n}{s}p.$$

Положим $k = (q+1)/n$. Тогда $q = kn-1$ и $p = 4-ks$. Таким образом,

$$f(x,y) = \sum_k a_k x^{4-ks}y^{kn-1}.$$

Условия $m \neq -1,\ 4 - ks \geq 0$ и $kn \geq 0$ дают $n > 0, 4 \leq k > 0,\ s = 1, 3$.

Если $s = 3$, то $f = a_1 x y^{n-1}$, если $s = 1$, то

$$f = a_1 x^3 y^{n-1} + a_2 x^2 y^{2n-1} + a_3 x y^{3n-1} + a_4 y^{4n-1}.$$

Таким образом, условия однородности дают 4 типа полиномов:

$$f = a_1 y^{n-1} + \varphi,\ n \equiv 1 \mathrm{mod} 2;$$

$$f = a_1 x y^{n-1} + \varphi;$$

$$f = a_1 x^2 y^{n-1} + a_2 y^{2n-1} + \varphi,\ n \equiv 1 \mathrm{mod} 2;$$

$$f = a_1 x^3 y^{n-1} + a_2 x^2 y^{2n-1} + a_3 x y^{3n-1} = a_4 y^{4n-1} + \varphi$$

(φ — квадратичная форма).

Используем теперь условия ассоциативности. Тогда 1) и 2) дают $f_{yyy} = 0$ и, следовательно, $a_1 = 0$. Тип 3) дает

$$(2a_1(n-1)y^{n-2})^2 = ((a_1 x^2 y^{n-1} + a_2 y^{2n-1})_{xxy})^2 = (a_1 x^2 y^{n-1} + a_2 y^{2n-1})_{yyy} =$$

$$= a_1(n-1)(n-2)(n-3)x^2 y^{n-4} + a_2(2n-1)(2n-2)(2n-3)y^{2n-4}.$$

Следовательно,

$$n = 3, m = \frac{2s-n}{n-s} = -\frac{1}{2} \text{ и } a_2 = \frac{16}{20} a_1^2.$$

Таким образом,

$$F = \frac{(t^1)^2 t^3 + t^1 (t^2)^2}{2} + a(t^2)^2 (t^3)^2 + \frac{16}{60} a^2 (t^3)^5.$$

Задача 8.4. *Доказать, что если $a = 1/4$, то F является потенциалом для M_3 из примера 2.2.*

Задача 8.5. *Доказать, что если тип 4 дает решения*

$$m = -\frac{2}{3},\ F = \frac{(t^1)^2 t^3 + t^1 (t^2)^2}{2} + a(t^2)^3 t^3 + +6a^2 (t^2)^2 (t^3)^3 + \frac{1296}{210} a^4 (t^3)^7,$$

$$m = -\frac{4}{5},\ F = \frac{(t^1)^2 t^3 + t^1 (t^2)^2}{2} + a(t^2)^3 (t^3)^2 + \frac{36}{20} a^2 (t^2)^2 (t^3)^5 + \frac{1296}{3960} a^4 (t^3)^{11}.$$

Это завершает доказательство теоремы. □

В параграфе 12 мы докажем, что эти решения являются потенциалом структур Дубровина на пространстве орбит кокстеровских групп A_3, B_3 и H_3.

9. Аналитические и алгебраические решения WDVV

Перейдем теперь к описанию аналитических решений уравнения WDVV, то есть решений с потенциалом вида

$$F(t^1, \dots, t^n) = \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} a_{i_1,\dots,i_m} t^{i_1}, \dots, t^{i_m},$$

где, для однозначности функции, коэффициенты $a_{i_1,\dots,i_m}$ инвариантны относительно любой перестановки индексов. Уравнения WDVV превращаются при этом в соотношения на коэффициенты $a_{i_1,\dots,i_m}$.

Условие нормализации означает, что коэффициенты $a_{\epsilon,i_1,\dots,i_m}$ равны 0 при $m > 2$ и $a_{\epsilon,\alpha,\alpha} = \delta_{2\alpha,n+1}$ и $a_{\epsilon,\alpha,\beta} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha+\beta,n+1}$ при $\alpha \neq \beta$.

Условие однородности также очевидным образом переписывается в соотношения между коэффициентами. Если все $d_\alpha \neq 0$ оно означает, например, что $a_{i_1,\dots,i_m} = 0$, если $m > 2$ и $\sum_{p=1}^{m} d_p l_p \neq (m+1)$, где $l_p = |\{j | i_j = p\}|$.

Опишем теперь условия на коэффициенты, эквивалентные уравнениям ассоциативности. Рассмотрим в векторном пространстве с координатами $(t^1, \dots, t^n)$ невырожденную симметричную матрицу $\{\eta^{\lambda\mu}\}$. Для описания решений удобно использовать *системы корреляторов* [16], то есть наборы чисел $< i_1, \dots, i_m >$, инвариантные относительно перестановки индексов и удовлетворяющих условию *когерентности*

$$\sum_{\sigma\in S_n} \sum_{k=0}^{m} \sum_{\lambda,\mu=0}^{n} < \alpha, \beta, i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)}, \lambda > \eta^{\lambda\mu} < \mu, i_{\sigma(k+1)}, \dots, i_{\sigma(m)}, \gamma, \delta >=$$

$$\sum_{\sigma\in S_n} \sum_{k=0}^{m} \sum_{\lambda,\mu=0}^{n} < \beta, \gamma, i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)}, \lambda > \eta^{\lambda\mu} < \mu, i_{\sigma(k+1)}, \dots, i_{\sigma(m)}, \delta, \alpha > .$$

для любых $\alpha, \beta, \gamma, \delta, i_1, \dots, i_m$

Теорема 9.1. *Функция F удовлетворяет уравнению ассоциативности если и только если набор чисел*

$$< i_1, \dots, i_k >= \frac{1}{(m-3)!} a_{i_1,\dots,i_k}$$

образует систему корреляторов.

Proof. Прямое вычисление дает

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} a_{\alpha,\beta,\gamma,i_1,\dots,i_m} t^{i_1} \dots t^{i_m} =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} < \alpha, \beta, \gamma, i_1, \dots, i_m > t^{i_1} \dots t^{i_m}$$

Откуда

$$\sum_{\lambda,\mu=0}^{n} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\lambda} \eta^{\lambda\mu} \sum_{\lambda,\mu=0}^{n} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\mu \partial t^\gamma \partial t^\delta} =$$

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \sum_{j_1,\dots,j_l=1}^{n} \sum_{\lambda,\mu}^{n} < \alpha, \beta, \lambda, i_1, \dots, i_k > \eta^{\lambda\mu} < \gamma, \delta, \mu, j_1, \dots, j_l > t^{i_1} \dots t^{i_k} t^{j_1} \dots t^{j_l}$$

Уравнение ассоциативности означает, что левая часть равенства не изменится, если поменять местами α и γ. Аксиома корреляторов означает, что правая часть равенства не изменится, если поменять местами α и γ. □

Бескоординатное описание системы корреляторов делается с помощью циклической $Comm_\infty$-алгебры [16]. Структура циклической $Comm_\infty$-алгебры на векторном пространстве H с невырожденной метрикой η задается последовательностью отображений $\circ_n : H^{\otimes n} \to H, n = 2, 3, \dots,$ (обозначаемых $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \circ_n(\gamma_1 \otimes \dots \otimes \gamma_n)$ со следующими свойствами:

- (*цикличность*)

$$\eta((\gamma_{\sigma(1)}, \dots, \gamma_{\sigma(n)}), \gamma_{\sigma(n+1)}) = \eta((\gamma_1, \dots, \gamma_n), \gamma_{n+1}) \text{ для всех перестановок } \sigma \in S_{n+1};$$

- (*ассоциативность*)

$$\sum_{\{i_1,\dots,i_k\} \cup \{j_1,\dots,j_l\} = \{1,\dots,m\}} ((\alpha, \beta, \delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_k}), \gamma, \delta_{j_1}, \dots, \delta_{j_l}) =$$

$$\sum_{\{i_1,\dots,i_k\} \cup \{j_1,\dots,j_l\} = \{1,\dots,m\}} ((\beta, \gamma, \delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_k}), \alpha, \delta_{j_1}, \dots, \delta_{j_l}) \text{ для всех } \alpha, \beta, \gamma, \delta_1, \dots, \delta_m (m \geq 0).$$

Теорема 9.2. *Последовательность отображений* $\circ_n : H^{\otimes n} \to H, n = 2, 3, \dots$ *образует циклическую* $Comm_\infty$*-алгебры на векторном пространстве* H *с невырожденной метрикой* η*, если и только если семейство чисел* $< i_1, \dots, i_k >= \eta((i_1, \dots, i_{k-1}), i_k)$ *образует систему корреляторов.*

Proof. Зафиксируем в пространстве H базис $e_1, \dots, e_r$ положим $\eta_{ij} = \eta(e_i, e_j)$. Рассмотрим обратную матрицу $\{\eta^{ij}\} = (\{\eta_{ij}\})^{-1}$. Тогда

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \sum_{i,j=1}^{r} \eta((\gamma_1, \dots, \gamma_n), e_i) \eta^{ij} e_j = \sum_{i,j=1}^{r} < \gamma_1, \dots, \gamma_n, e_i > \eta^{ij} e_j.$$

Таким образом

$$((\gamma_1, \dots, \gamma_{n_1}), \gamma_{n_1+1} \dots, \gamma_{n_1+n_2}) = \sum_{i,j=1}^{r} < \gamma_1, \dots, \gamma_{n_1}, e_i > \eta^{ij} (e_j, \gamma_{n_1+1} \dots, \gamma_{n_1+n_2}) =$$

$$\sum_{i,j=1}^{r} \sum_{i,j=1}^{r} < \gamma_1, \dots, \gamma_{n_1}, e_i > \eta^{ij} < e_j, \gamma_{n_1+1} \dots, \gamma_{n_1+n_2} e_a > \eta^{ab} e_b =$$

$$\sum_{i,j=1}^{r} \sum_{i,j=1}^{r} < \gamma_1, \dots, \gamma_{n_1}, e_i > \eta^{ij} < e_j, \gamma_{n_1+1} \dots, \gamma_{n_1+n_2} > .$$

Поэтому условие ассоциативности эквивалентно условию когерентности. □

Используем теперь, следуя [12] описание решений уравнений ассоциативности через системы корреляторов для построения решений чисто алгебраического происхождения.

Рассмотрим фробениусову пару (A, θ) и последовательность линейных операторов $f_3, f_4, \cdots : A \to A$, принадлежащих некоторому компактному подмножеству множества $\mathsf{End}(A)$ и таких, что $f_i(ab) = af_i(b)$.

Лемма 9.1. *Числа* $< i_1, \dots, i_m >= \eta(e_{i_1} \dots e_{i_{m-1}}, f_m(e_{i_m}))$, *где* $\eta(a, b) = \theta(ab)$, *образует систему корреляторов, причем*

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} < i_1, \dots, i_s, \lambda > \eta^{\lambda\mu} < i_{s+1}, \dots, i_m, \mu >= \eta(f_s(e_{i_1}, \dots, e_{i_s}), f_{m-s}(e_{i_{s+1}}, \dots, e_{i_m})).$$

Proof. Зафиксируем произвольный базис $e_1, \dots, e_n$. Рассмотрим разложение

$$f_m(e_{i_1} \dots e_{i_{m-1}}) = \sum_{j=1}^{n} \varphi^j_{i_1 \dots i_{m-1}} e_j.$$

Тогда

$$< i_1, \dots, i_m >= \eta(e_{i_1} \dots e_{i_{m-1}}, f_m(e_{i_m})) = \eta(f_m(e_{i_1} \dots e_{i_{m-1}}), e_{i_m}) = \sum_{j=1}^{n} \varphi^j_{i_1 \dots i_{m-1}} \eta_{i_m j}.$$

Таким образом,

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} < e_{i_1}, \dots, e_{i_s}, \lambda > \eta^{\lambda\mu} < e_{i_{s+1}}, \dots, e_{i_m}, \mu >= \sum_{j,k,\mu,\nu=1}^{n} \varphi^j_{i_1 \dots i_s} \eta_{j\lambda} \varphi^k_{i_{s+1} \dots i_m} \eta_{\mu k} \eta^{\lambda\mu} =$$

$$\sum_{j,k,\mu,\nu=1}^{n} \varphi^j_{i_1 \dots i_s} \varphi^k_{i_{s+1} \dots i_m} \eta_{jk} = \eta(f_s(e_{i_1}, \dots, e_{i_s}), f_{m-s}(e_{i_{s+1}}, \dots, e_{i_m}))$$

Когерентность следует теперь из соотношения $\eta(ab, f(c)) = \eta(bc, f(a))$. □

Теорема 9.3. *Для любого* $a = \sum\limits_{i=1}^{n} t^i e_i \in A$ *ряд*

$$F(t) = \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{m!} \eta(a^{m-1}, f_m(a))$$

абсолютно сходится и определяет голоморфную функцию $F : A \to \mathbb{C}$, *удовлетворяющую уравнению ассоциативности относительно матрицы* η^{ij}.

Proof. Абсолютная сходимость следует из компактности замыкания множества операторов. Уравнение ассоциативности следует из теоремы 9.1 и предыдущей леммы. □

10. Когомологическая теория поля

Обозначим через $M_{0,n}$ пространство модулей римановых сфер с n попарно различными нумерованными точками, то есть $(2n-6)$-мерное пространство классов биголоморфной эквивалентности таких сфер. оно гомеоморфно $\mathbb{R}^{2n-6}/\mathsf{Mod}_n$, где Mod_n дискретно действующая группа сферических кос.

Рассмотрим ее *компактификацию Делиня-Мамфорда* [16] $\overline{M}_{0,n}$. Граница компактификации $\partial\overline{M}_{0,n} = \overline{M}_{0,n} \setminus M_{0,n}$ получается стягиванием в точки попарно непересекающихся контуров. (Стягиванием контура в точку называется результат деформации римановой с проколами в отмеченных точках, при которой длина контура в гиперболической метрике стремится к 0).

Пространство $\overline{M}_{0,n}$ представляется, таким образом в в виде объединения подпространств, отвечающих деревьям, где ребра заменены сферами с отмеченными нумерованными точками. По определению компактификации допускаются лишь деревья состоящие их стабильных сфер, то есть сфер число отмеченных точек на которой вместе с числом точек, полученных стягиванием контуров, превосходит 2.

Подпространства, отвечающие деревьям с m сферами гомеоморфны фактор-пространству $\mathbb{R}^{2n-6-2m+2}$ по дискретной группе. Отвечающие им гомологии порождают группу $H_{2n-6-2m}(\overline{M}_{0,n})$. Определяющие соотношения между образующими найдены в [7] и [16]. Они строятся по:

- произвольной перетянутой сфере $S \in H_{2n-6-2m+2}(\overline{M}_{0,n})$;
- произвольной сфере $\tilde{S}$ из тех на которые перетянутая сфера S, распадается после удаления перетяжек;
- произвольной четверке точек $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \tilde{S}$, где a_i — это или отмеченные точки, или точки, порожденные перетяжкой контура.

По этому набору данных мы строим две формальные суммы пространств перетянутых сфер, порождающих $H_{2n-6-2m}(\overline{M}_{0,n})$. Одна из сумм ξ_1 состоит из перетяжек, отделяющих точки a_1, a_2 от a_3, a_4. Другая ξ_2 состоит из перетяжек, отделяющих точки a_1, a_3 от a_2, a_4. Разность $\xi_1 - \xi_2$ представляет нулевой элемент гомологий. Эти разности и порождают все соотношения между описанными выше образующими группы $H_{2n-6-2m}(\overline{M}_{0,n})$.

Любому разбиению σ множества $\{1, \ldots, n\}$ на 2 подмножества мощности $n_1, n_2 > 2$ отвечает естественное вложение

$$\overline{M}_{0,n_1+1} \times \overline{M}_{0,n_1+1} \to \overline{M}_{0,n}.$$

Из описания групп гомологий следует, что разбиение σ порождает гомоморфизм

$$\varphi_\sigma : H_*(\overline{M}_{0,n_1+1}) \otimes H_*(\overline{M}_{0,n_1+1}) \to H_*(\overline{M}_{0,n}),$$

который, в свою очередь, порождает гомоморфизм

$$\varphi_\sigma^* : H^*(\overline{M}_{0,n}) \to H^*(\overline{M}_{0,n_1+1}) \otimes H^*(\overline{M}_{0,n_1+1}).$$

Перейдем теперь к определению *когомологической теории поля рода 0.* Она состоит из конечномерного векторного пространства с невырожденной билинейной формой (H, η) и семейства линейных отображений

$$I_n : H^{\otimes n} \to H^*(\overline{M}_{0,n}),\ n = 3, 4, \ldots\ ,$$

которые

- инвариантны относительно действия группы S_n на $H^{\otimes n}$,
- удовлетворяют условию *расщепляемости*

$$\varphi_\sigma^*(I_n(\gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_n)) = \sum_{i,j=1}^{l} I_{|S_1|}(\bigotimes_{p \in S_1} \gamma_p \otimes e_i) \eta^{ij} I_{|S_2|}(e_j \otimes \bigotimes_{q \in S_2} \gamma_q)$$

  для любого разбиения $S_1 \coprod S_2 = \{1, \ldots, n\}$, где $|S_i| > 2$, $\{e_1, \ldots, e_l\}$ — базис в H и η^{ij} — матрица, обратная к матрице грамма $\eta_{ij} = \eta(e_i, e_j)$.

Гомологические классы из $H_*(\overline{M}_{0,n})$ порождают линейные функционалы на $H^*(\overline{M}_{0,n})$. Обозначим через

$$\int\limits_{\overline{M}_{0,n}} : H^*(\overline{M}_{0,n}) \to \mathbb{C}$$

функционал, порожденный клеткой $M_{0,n}$.

Теорема 10.1. *Равенство* $< i_1, \dots, i_n >= \int\limits_{\overline{M}_{0,n}} I_n(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n})$ *задает биекцию между системами корреляторов и когомологическими теориями поля.*

Proof. Докажем, что когомологическая теория поля

$$\{I_n : H^{\otimes n} \to H^*(\overline{M}_{0,n}),\ n = 3, 4, \dots\}$$

порождает систему корреляторов

$$< i_1, \dots, i_n >= \int\limits_{\overline{M}_{0,n}} I_n(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}).$$

Сопоставим произвольной четверке точек $a_1, a_2, a_3, a_4 \in S$ с номерами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ две формальные суммы перетянутых сфер из $H_{2n-8}(\overline{M}_{0,n})$. Слагаемые одной из них ξ_1 образуют множество $\{\Sigma_1\}$, состоящее из перетяжек, отвечающих разбиениям , отделяющих точки a_1, a_2 от a_3, a_4. Слагаемые другой ξ_2 образуют множество $\{\Sigma_2\}$, состоящее из перетяжек, отвечающих разбиениям , отделяющих точки a_1, a_3 от a_2, a_4. Разность $\xi_1 - \xi_2$ представляет нулевой элемент гомологий. Таким образом,

$$0 = \int\limits_{\xi_1 - \xi_2} \sum_{\sigma} \varphi_\sigma^*(I_n(e_1 \otimes \dots \otimes e_n)) = \int\limits_{\xi_1 - \xi_2} \sum_{\sigma} \sum_{i,j=1}^{l} I_{|S_1|}(\bigotimes_{p \in S_1} e_p \otimes e_i)\eta^{ij} I_{|S_2|}(e_j \otimes \bigotimes_{q \in S_2} e_q)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{k=0}^{n} \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} < \alpha_1, \alpha_2, i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)}, \lambda > \eta^{\lambda\mu} < \mu, \alpha_3, \alpha_4, i_{\sigma(k+1)}, \dots, i_{\sigma(m)} > -$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \sum_{k=0}^{m} \sum_{\lambda,\mu=0}^{n} < \alpha_3, \alpha_2, i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)}, \lambda > \eta^{\lambda\mu} < \mu, \alpha_1, \alpha_4, i_{\sigma(k+1)}, \dots, i_{\sigma(m)} > .$$

Это равенство и означает условие когерентности для семейства корреляторов $\{< i_1, \dots, i_n >\}$.

Сопоставим теперь семейство линейных отображений $I_n : H^{\otimes n} \to H^*(\overline{M}_{0,n})$, $n = 3, 4, \dots$, произвольной системе корреляторов $\{< i_1, \dots, i_m >\}$. Для построения семейства отображений мы должны сопоставить каждому набору $\{i_1, \dots, i_m\}$ линейные функционалы

$$I_n(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}) : H_*(\overline{M}_{0,n}) \to \mathbb{C},$$

то есть определить значение этого функционала на каждой перетянутой сфере с отмеченными точками.

Для сферы без перетяжек $M_{0,n}$ положим $I_n(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n})(M_{0,n}) =< i_1, \dots, i_n >$. В случае, если перетянутая сфера M разбивает множество индексов $(i_1, \dots, i_m)$ на группы $(i_1^1, \dots, i_1^{n_1}), \dots, (i_1^k, \dots, i_k^{n_k})$ положим

$$I_n(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m})(M) = \sum_{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{k-1}, \beta_{k-1}=1}^{n} < i_1^1, \dots, i_1^{n_1}, \alpha_1 > \eta^{\alpha_1 \beta_1}$$

$$< \beta_1, i_2^1, \dots, i_2^{n_2}, \alpha_2 > \eta^{\alpha_2 \beta_2} \dots \eta^{\alpha_{k-1} \beta_{k-1}} < \beta_{k-1}, i_k^1, \dots, i_{k-1}^{n_{k-1}} > .$$

Продолжим теперь функционал по линейности на все линейные комбинации перетянутых сфер. Свойство когерентности корреляторов гарантирует, что ядро этого функционала содержит разности вида $\xi_1 - \xi_2$ из первой части доказательства. С другой стороны, согласно теореме Кила-Манина эти соотношения порождают все другие соотношения между образующими группы $H_*(\overline{M}_{0,n})$. Таким образом, мы построили семейство гомоморфизмов

$$\{I_n : H^{\otimes n} \to H^*(\overline{M}_{0,n}),\ n = 3, 4, \dots\}$$

такое, что

$$< e_{i_1}, \dots, e_{i_n} >= \int\limits_{\overline{M}_{0,n}} I_n(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}).$$

□

Когомологическая теория поля, где $I_n(H^{\otimes n}) \subseteq H^0(\overline{M}_{0,n}),\ n = 3, 4, \dots$, называется *топологической теорией поля*[2]. Категория топологических теорий поля изоморфна категории фробениусовых пар [4],[1]. По образцу топологической теории поля можно построить более общую *теорию поля со значением в функторе* [9], включающую в себя не только когомологическую теорию поля, но и множество ее аналогов, в том числе некоммутативных . Они, в свою очередь приводят некоммутативным аналогам систем корреляторов и фробениусовых многообразий [9], [10].

11. Инварианты Громова-Виттена

Естественные примеры когомологической теории поля дает теория инвариантов Громова-Виттена [8].

Пусть (X, ω) — симплектическое многообразие размерности $2n$ такое, что

$$H^{2k+1}(X, \mathbb{C}) = 0 \text{ и } H^{2k}(X, \mathbb{Z}) \cong Z^{m_k}.$$

Определение 11.1. *Тензор*

$$J \in TX \otimes T^*X \ (J_p : T_pX \to T_pX)$$

называется почти комплексной структурой, если $J_p^2 = -1$. Почти комплексная структура называется согласованной с ω, если тензор $g(a, b) = \omega(a, Jb)$ порождает риманову метрику на X.

Пусть J согласована с ω и $c_1 = c_1(X) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ — первый класс Черна многообразия X с почти комплексной структурой J. Можно доказать, что ω полностью определяет c_1.

Пусть Σ — риманова поверхность рода g. Тогда $T_p\Sigma \cong \mathbb{C}$, для каждого $p \in \Sigma$, и умножение на $i = \sqrt{-1}$ порождает почти комплексную структуру $j_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$.

Определение 11.2. *Отображение* $u : \Sigma \to X$ *называется* J *-голоморфным, если для каждого* $p \in \Sigma$ *отображение* $(du)_p : T_p\Sigma \to T_{u(p)}X$ *удовлетворяет условию* $J_{(u(p))}(du)_p = (du)_p j_p$.

Определение 11.3. *Пусть*

$$A \in H_2(X, \mathbb{Z});\ a_i, b_j \in H_*(X, \mathbb{Z});\ x_1, ..., x_k \in \Sigma;\ (i = 1, ..., k;\ j = 1, ..., \ell).$$

причем a_i, b_i *однородные элементы группы гомологий. Рассмотрим представляющие их подмногообразия* $\tilde{a}_i \in a_i$, $\tilde{b}_j \in b_j$ *общего положения.*

Обозначим через

$$\Phi^A_{g,k,\ell}(\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_k | \tilde{b}_1, ..., \tilde{b}_\ell)$$

число J*-голоморфизмов* $u : \Sigma \to X$ *таких, что* $u(\Sigma) \in A$, $u(x_i) \in \tilde{a}_i$ *и* $u(\Sigma) \cap \tilde{b}_j \neq \emptyset$.

Теорема-Оределение 11.1. *Пусть* $(\omega, A) > 0$ *и* $(c_1, A) \geq 0$. *Тогда число*

$$\Phi^A_{g,k,\ell}(\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_k | \tilde{b}_1, ..., \tilde{b}_\ell)$$

полностью определяется классами $a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_\ell$. *Оно конечно, если*

$$\sum_{i=1}^{k} \dim a_i + \sum_{j=1}^{\ell} \dim b_i = 2n(g + k - 1) + 2\ell(n - 1) - 2(c_1, A).$$

В противном случае мы положим

$$\Phi^A_{g,k,\ell}(a_1, ..., a_k | b_1, ..., b_\ell) = 0.$$

Числа

$$\Phi^A_{g,k,\ell}(a_1, ..., a_k | b_1, ..., b_\ell)$$

называются инвариантами Громова-Виттена.

Пример 11.1. *Пусть* $X = \mathbb{C}P^n$, a_i *— образующие* $H_{2i}(X, \mathbb{Z})$. *Найдем* $\Phi_{0,3,0}(a_0, a_0, a_{n-1}) = 1$.

Рассмотрим точки общего положения a', a'' *и гиперплоскость* $a \in a_{2n-2}$. *Пусть* $\Sigma = \mathbb{C}P^1 = \overline{\mathbb{C}}$ *и* $x_1 = 0, x_2 = \infty, x_3 = 1 \in \Sigma$.

Тогда $\Phi_{0,3,0}(a', a'', a)$ *— это числа прямых* $u : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^n$ *таких, что* $u(0) = a', u(\infty) = a''$ *и* $u(1) \in \tilde{a}$. *Таким образом,* $\Phi_{0,3,0}(a_0, a_0, a_{n-1}) = \Phi_{0,3,0}(a', a'', a) = 1$.

Свойства инвариантов Громова-Виттена подробно изучены в [13]. Приведем лишь важное для нас следствие этой работы. Выберем в $H_*(X, \mathbb{C})$ однородный базис $h_1, ..., h_n$, такой, что $h_1 = X$ и индекс пересечения $\langle h_i, h_j \rangle = \delta_{i+j,n+1}$.

Теорема 11.1. *Числа* $< i_1, \ldots, i_{l+3} >= \Phi_{0,3,l}(h_{i_1}, h_{i_2}, h_{i_3} | h_{i_4}, \ldots, h_{i_{l+3}})$ *образуют систему корреляторов относительно матрицы* $\eta^{ij} = \delta_{i+j,n+1}$. *Они порождают когомологическую теорию поля и фробениусово многообразие с потенциалом*

$$F(t^1, ..., t^n) = \sum_{A \in H_2(X,\mathbb{Z})} \sum_{\ell \geq 0} \frac{1}{(\ell + 3)!} \Phi^A_{0,3,\ell}(x, x, x | x, ..., x) exp(-\langle \omega, A \rangle),$$

где $x = \sum_{i=1}^n t^i h_i$ *и* $\Phi^A_{0,3,\ell} : H^{\ell+3} \to \mathbb{C}$ — *линейный функционал порожденный инвариантами Громова-Виттена* $\Phi^A_{0,3,\ell}$. *Эйлерово поле могообразия равно*

$$E = \sum_{\alpha=1}^n (1-q_\alpha) t^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha} - \sum \tau_\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha},$$

где

$$q_\alpha = \frac{1}{2}\dim h_\alpha \quad \text{и} \quad c_1(X) = \sum_\alpha \tau_\alpha h_\alpha.$$

Следствие 11.1. *Пара* (F, E) *удовлетворяет уравнению WDVV.*

Уравнения WDVV дают нетривиальные соотношения между инвариантами Громова-Виттена

Пример 11.2. *(Концевич и Манин). Найдем потенциал для* $X = \mathbb{C}P^2$. *Геометрический смысл коэффициентов потенциала исследуется так же, как в примере 11.1. Таким образом*

$$F(t^1, t^2, t^3) = \frac{1}{2}(t^1(t^2)^2 + (t^1)^2 t^3) + \sum_{d>0} N(d) \frac{(t^3)^{3d-1}}{(3d-1)!} e^{dt^2},$$

где $N(d)$ — *число рациональных кривых степени* d*, проходящих через* $3d-1$ *точек общего положения. Вычисление чисел* $N(d)$ *является классической задачей математики 19 века.*

Уравнение ассоциативности дает

$$N(d) = \frac{1}{2} \sum_{d_1+d_2=d} \frac{d_1 d_2 (3dd_1 d_2 - 2d^2 + 6d_1 d_2)(3d-4)!}{(3d_1-1)!(3d_2-1)!} \cdot N(d_1) \cdot N(d_2),$$

что позволяет рекуррентно найти все числа $N(d)$.

12. Связка плоских кометрик и структура Дубровина

Наряду с обычными метриками мы будем использовать и кометрики, то есть тензорные поля $h^* \in TM \otimes TM$, которые дадут в каждой точке $p \in M$ невырожденную симметрическую билинейную форму на $T^*_p M$. Тогда равенство $h^*(\varphi(a), \ell) =< a, \ell >$, где $a \in T_p M$, $\ell \in T^*_p M$ и $< a, \ell >= \ell(a)$, дает изоморфизм $\varphi : T_p M \to T^*_p M$, который порождает обычную метрику $h(a,b) = h^*(\varphi(a), \varphi(b))$. Тензоры h и h^* называются сопряженными. Если $t^1, ..., t^n$ — координаты на $U \ni p$ и

$$h = \sum_{ij} h_{ij} dt^i \otimes \partial t^j, \ h^* = \sum_{ij} h^{ij} \frac{\partial}{\partial t^i} \otimes \frac{\partial}{\partial t^j},$$

то

$$\sum_k h_{ik} h^{kj} = \delta_{ij}.$$

Метрика h порождает связность Леви-Чевита ∇ с символами Кристоффеля

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} \sum_s h^{ks} \Big(\frac{\partial h_{sj}}{\partial t^i} + \frac{\partial h_{is}}{\partial t^j} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial t^s} \Big).$$

При этом
$$\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji},\ \frac{\partial}{\partial t^k}h_{ij}=\sum_s(\Gamma^s_{ik}h_{sj}+\Gamma^s_{kj}h_{is})$$
и
$$\frac{\partial}{\partial t^k}h^{ij}=-\sum_s(\Gamma^i_{sk}h^{sj}+\Gamma^j_{ks}h^{is}).$$
Положим
$$\nabla^i=\sum_s h^{is}\nabla_s \text{ и } \Gamma^{ij}_k=h^*(dt^i,\nabla_k dt^j)=-\sum_s h^{is}\Gamma^j_{sk}.$$
Тогда
$$\frac{\partial h^{ij}}{\partial t^k}=\Gamma^{ij}_k+\Gamma^{ji}_k \text{ и } \sum_s h^{is}\Gamma^{jk}_s=\sum_s h^{js}\Gamma^{ik}_s.$$

Кометрика h^* называется плоской, если $h^{ij}=\mathrm{const}$ для некоторых координат $(t^1,...,t^n)$.

Задача 12.1. . *Доказать, что кометрика h^* плоская, если и только если*
$$\sum_s h^{is}\Big(\frac{\partial\Gamma^{jk}_\ell}{\partial t^s}-\frac{\partial\Gamma^{jk}_s}{\partial t^\ell}\Big)+\sum_s\Gamma^{ij}_s\Gamma^{sk}_\ell-\sum_s\Gamma^{ik}_s\Gamma^{sj}_\ell=0$$
для всех i,j,k,ℓ.

Определение 12.1. *Пара кометрик (h_1^*,h_2^*) называется связкой плоских кометрик, если для каждого $\lambda\in\mathbb{C}$ кометрика $h^*=h_1^*+\lambda h_2^*$ является плоской и ее символы Кристоффеля равны $\Gamma^{ij}_k=\Gamma^{ij}_{1k}+\lambda\Gamma^{ij}_{2k}$.*

Связки плоских кометрик играют важную роль в классификации интегрируемых систем гидродинамического типа.

Задача 12.2. *Пусть $h_1^*=\sum_{ij}h_1^{ij}(\partial/\partial t^i)\otimes(\partial/\partial t^j)$ — плоская кометрика, Γ^{ij}_{1k} — ее символы Кристоффеля и*
$$\frac{\partial^2 h_1^{ij}}{\partial(t^1)^2}=\frac{\partial^2\Gamma^{ij}_{1k}}{\partial(t^1)^2}=0,\quad det(\frac{\partial h_1^{ij}}{\partial t^1})\neq 0.$$
Тогда $\Gamma^{ij}_{2k}=\partial\Gamma^{ij}_{1k}/\partial t^1$ являются символами Кристоффеля кометрики $h_2^{ij}=\partial h_1^{ij}/\partial t^1$ и пара (h_1^*,h_2^*) является связкой плоских кометрик.

Пусть M — многообразие со структурой Дубровина. Тогда каждому $p\in M$ отвечает пар Фробениуса (M_p,θ_p). Пусть $g(a_1,a_2)=\theta(a_1\cdot a_2)$ и $g^*\in TM\otimes TM$ — кометрика, сопряженная к g. Она порождает изоморфизм $\varphi:TM\to T^*M$. Для $\ell,\ell_1,\ell_2\in M_p^*=T_p^*M$ мы положим $\ell_1\cdot\ell_2=\varphi(\varphi^{-1}(\ell_1)\cdot\varphi^{-1}(\ell_2))$ и $\theta^*(\ell)=\theta(\varphi^{-1}(\ell))$. Тогда φ порождает изоморфизм пар (M_p,θ_p), (M_p^*,θ_p^*) и
$$g^*(\ell_1,\ell_2)=\theta^*(\ell_1\cdot\ell_2)=\theta(\varphi^{-1}(\ell_1\cdot\ell_2))=\theta(\varphi^{-1}(\ell_1)\cdot\varphi^{-1}(\ell_2))=$$
$$=g(\varphi^{-1}(\ell_1),\varphi^{-1}(\ell_2))=\langle\ell_1,\varphi^{-1}(\ell_2)\rangle,$$
где $\langle\ell_1,\varphi^{-1}(\ell_2)\rangle=\ell_1(\varphi^{-1}(\ell_2))$.

Рассмотрим кометрику
$$h^*(\ell_1,\ell_2)=\langle E,\ell_1\cdot\ell_2\rangle=\langle\varphi(E),\varphi^{-1}(\ell_1\cdot\ell_2)\rangle=$$
$$=g(E,\varphi^{-1}(\ell_1,\cdot\ell_2))=\theta(E\cdot\varphi^{-1}(\ell_1\cdot\ell_2)),$$

где E — эйлерово поле. Наша цель — доказать, что (g^*, h^*) является связкой плоских кометрик.

Зададим гомоморфизм $\widetilde{\psi} : M_p^* \to M_p$ равенством $< \ell_1, \widetilde{\psi}\ell_2 >= h^*(\ell_1, \ell_2)$. Если $\widetilde{\psi}$ является изоморфизмом, то положим

$$\psi = \widetilde{\psi}^{-1} : M_p \to M_p^* \ \text{ и } \ h(a_1, a_2) = h^*(\psi(a_1), \psi(a_2)).$$

Лемма 12.1. *Гомоморфизм $\widetilde{\psi}$ является изоморфизмом, если и только если $E_p = E(p)$ является обратимым элементом алгебры M_p. В этом случае $h(a_1, a_2) = g(E_1^{-1} a_1, a_2)$.*

Proof. Ввиду равенства $\dim M_p^* = \dim M_p$, гомоморфизм $\widetilde{\psi}$ является изоморфизмом, если и только если $\widetilde{\psi}$ является мономорфизмом, то есть форма h^* является невырожденной. Но

$$h^*(\ell_1, \ell_2) = \theta(E \cdot \varphi^{-1}(\ell_1) \cdot \varphi^{-1}(\ell_2)),$$

где $E = E_p$, и, следовательно, кометрика h^* невырождена, если и только если $E \cdot \varphi^{-1}(\ell_1) \neq 0$ для всех $\ell_1 \neq 0$. Согласно теореме 1.1 это условие эквивалентно обратимости E. В этом случае

$$\begin{aligned} h(E \cdot a_1, a_2) = h^*(\psi(E \cdot a_1), \psi(a_2)) = \langle E \cdot a_1, \psi(a_2) \rangle = \\ = g(E \cdot a_1, \varphi^{-1}\psi(a_2)) = g(E, a_1 \cdot \varphi^{-1}\psi(a_2)) = \\ = h^*(\varphi(a_1), \psi(a_2)) = \langle \varphi(a_1), a_2 \rangle = g(a_1, a_2). \end{aligned}$$

□

Положим $M^0 = \{p \in M | E_p - \text{обратимо}\}$.

Задача 12.3. *Пусть $M = M_n$ множество многочленов из примера 2.2, тогда M^0 — множество многочленов вида*

$$f(z) = \prod_{i=1}^{n+1} (z - z_i),$$

где $z_i \neq z_j$.

Задача 12.4. *Корни $(x^1, ..., x^n)$ уравнения $det(h^{\alpha\beta} - x g^{\alpha\beta}) = 0$ образуют канонические координаты на M^0.*

Лемма 12.2. *Пусть $(t^1, ..., t^n)$ — плоские однородные координаты структуры Дубровина (F, E) и*

$$E = \sum_\alpha (d_\alpha t^\alpha + r_\alpha) \frac{\partial}{\partial t^\alpha},$$

$$L_E F = (m+3)F + \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta + \sum_\alpha B_\alpha t^\alpha + C.$$

Тогда

$$h^* = \sum_{\alpha,\beta} h^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial t^\beta},$$

где

$$h^{\alpha\beta} = \sum_\eta (d_\eta t^\eta + r_\eta) \frac{\partial^3 F}{\partial t^{n+1-\alpha} \partial t^{n+1-\beta} \partial t^\eta} =$$

$$= (d_\alpha + d_\beta - m - 1)\frac{\partial^2 F}{\partial t^{n+1-\alpha}\partial t^{n+1-\beta}} + A_{n+1-\alpha,n+1-\beta}.$$

Proof. Имеем

$$g\Big(\frac{\partial}{\partial t^\eta}, \varphi^{-1}(dt^\alpha \cdot dt^\beta)\Big) = g^*\Big(\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial t^\eta}\Big), dt^\alpha \cdot dt^\beta\Big) = \Big\langle \frac{\partial}{\partial t^\eta}, dt^\alpha \cdot dt^\beta \Big\rangle =$$

$$= \Big\langle \frac{\partial}{\partial t^\eta}, \varphi(\varphi^{-1}(dt^\alpha) \cdot \varphi^{-1}(dt^\beta)) \Big\rangle =$$

$$= \Big\langle \frac{\partial}{\partial t^\eta}, \varphi\Big(\Big(\sum_\gamma g^{\alpha\gamma}\frac{\partial}{\partial t^\gamma}\Big) \cdot \Big(\sum_\sigma g^{\beta\sigma}\frac{\partial}{\partial t^\sigma}\Big)\Big)\Big\rangle =$$

$$= \sum_{\gamma,\sigma}\Big\langle \frac{\partial}{\partial t^\eta}, \varphi\Big(\frac{\partial}{\partial t^\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\sigma}\Big)\Big\rangle g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} = \sum_{\gamma,\sigma} g^{\alpha\gamma}g^{\beta\sigma} g\Big(\frac{\partial}{\partial t^\eta}, \frac{\partial}{\partial t^\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\sigma}\Big) =$$

$$= \sum_{\gamma,\sigma} g^{\alpha\gamma}g^{\beta\sigma} g\Big(\frac{\partial}{\partial t^\eta}, \sum_\omega \frac{\partial^3 F}{\partial t^\gamma \partial t^\sigma \partial t^{n+1-\omega}} \cdot \frac{\partial}{\partial t^\omega}\Big) =$$

$$= \sum_{\gamma,\sigma,\omega} g^{\alpha\gamma}g^{\beta\sigma} g_{\eta\omega}\frac{\partial^3 F}{\partial t^\gamma \partial t^\sigma \partial t^{n+1-\omega}} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^{n+1-\alpha}\partial t^{n+1-\beta}\partial t^\eta}.$$

Следовательно,

$$h^{\alpha\beta} = h^*(dt^\alpha, dt^\beta) = g(E, \varphi^{-1}(dt^\alpha \cdot dt^\beta)) = g\Big(\sum_\eta (d_\eta t^\eta + r_\eta)\frac{\partial}{\partial t^\eta}, \varphi^{-1}(dt^\alpha \cdot dt^\beta)\Big) =$$

$$= \sum_\eta (d_\eta t^\eta + r_\eta) g\Big(\frac{\partial}{\partial t^\eta}, \varphi^{-1}(dt^\alpha \cdot dt^\beta)\Big) = \sum_\eta (d_\eta t^\eta + r_\eta)\frac{\partial^3 F}{\partial t^{n+1-\alpha}\partial t^{n+1-\beta}\partial t^\eta}.$$

Условие однородности дает

$$(m+3)\frac{\partial^2 F}{\partial t^{n+1-\alpha}\partial t^{n+1-\beta}} + A_{n+1-\alpha,n+1-\beta} = \frac{\partial^2 (L_E(F))}{\partial t^{n+1-\alpha}\partial t^{n+1-\beta}} =$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^{n+1-\alpha}\partial t^{n+1-\beta}}\Big(\sum_\eta (d_\eta t^\eta + r_\eta)\frac{\partial F}{\partial t^\eta}\Big) = \sum_\eta (d_\eta t^\eta + r_\eta)\frac{\partial^3 F}{\partial t^{n+1-\alpha}\partial t^{n+1-\beta}\partial t^\eta} +$$

$$+ d_{n+1-\alpha}\frac{\partial^2 F}{\partial t^{n+1-\alpha}\partial t^{n+1-\beta}} + d_{n+1-\beta}\frac{\partial^2 F}{\partial t^{n+1-\alpha}\partial t^{n+1-\beta}}.$$

Таким образом,

$$\sum_\eta (d_\eta t^\eta + r_\eta)\frac{\partial^3 F}{\partial t^{n+1-\alpha}\partial t^{n+1-\beta}\partial t^\eta} =$$

$$= (m + 3 - d_{n+1-\alpha} - d_{n+1-\beta})\frac{\partial^2 F}{\partial t^{n+1-\alpha}\partial t^{n+1-\beta}} + A_{n+1-\alpha,n+1-\beta}.$$

□

Задача 12.5. *Если $d_\alpha + d_\beta \neq m+1$ для всех α, β, то $g^* = L_e h^*$.*

Лемма 12.3. *Пусть $(t^1, ..., t^n)$ — плоские квазиоднородные координаты структуры (F, E). Тогда символы Кристоффеля кометрики h^* имеют вид*

$$\Gamma^{\alpha\beta}_\gamma = \Big(-\frac{m+1}{2} + d_\beta\Big)\frac{\partial^3 F}{\partial t^{n+1-\alpha}\partial t^{n+1-\beta}\partial t^\gamma}.$$

Proof. Символы Кристоффеля $\Gamma^{\alpha\beta}_{\gamma}$ однозначно восстанавливаются по кометрике $h^{\alpha\beta}$ с помощью уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t^{\gamma}} h^{\alpha\beta} = \Gamma^{\alpha\beta}_{\gamma} + \Gamma^{\beta\alpha}_{\gamma}, \quad \sum_{\omega} h^{\alpha\omega}\Gamma^{\beta\gamma}_{\omega} = \sum_{\omega} h^{\beta\omega}\Gamma^{\alpha\gamma}_{\omega}$$

(здесь n^3 уравнений на $\Gamma^{\alpha\beta}_{\gamma}$). Таким образом, достаточно доказать, что функции

$$\widetilde{\Gamma}^{\alpha\beta}_{\gamma} = \Big(-\frac{m+1}{2} + d_{\beta}\Big)\frac{\partial^3 F}{\partial t^{n+1-\alpha}\partial t^{n+1-\beta}\partial t^{\gamma}}$$

удовлетворяют этим уравнениям.

Согласно лемме 12.2,

$$\frac{\partial}{\partial t^{\gamma}} h^{\alpha\beta} = (d_{\alpha} + d_{\beta} - m - 1)\frac{\partial^3 F}{\partial t^{n+1-\alpha}\partial t^{n+1-\beta}\partial t^{\gamma}} = \widetilde{\Gamma}^{\alpha\beta}_{\gamma} + \widetilde{\Gamma}^{\beta\alpha}_{\gamma}.$$

Кроме того, лемма 12.2 и уравнения ассоциативности дают

$$\sum_{\omega} h^{\alpha\omega}\widetilde{\Gamma}^{\beta\gamma}_{\omega} = \sum_{\omega}\Big(\sum_{\eta} E_{\eta}\frac{\partial^3 F}{\partial t^{n+1-\alpha}\partial t^{n+1-\omega}\partial t^{\eta}}\Big(-\frac{m+1}{2} + d_{\gamma}\Big)\frac{\partial^3 F}{\partial t^{n+1-\beta}\partial t^{n+1-\gamma}\partial t^{\omega}}\Big) =$$

$$= \Big(-\frac{m+1}{2} + d_{\gamma}\Big) \times \sum_{\eta} E_{\eta}\Big(\sum_{\omega}\frac{\partial^3 F}{\partial t^{n+1-\beta}\partial t^{n+1-\omega}\partial t^{\eta}} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial t^{n+1-\alpha}\partial t^{n+1-\gamma}\partial t^{\omega}}\Big) =$$

$$\Big(-\frac{m+1}{2} + d_{\gamma}\Big) \times \sum_{\eta} E_{\eta}\Big(\sum_{\omega}\frac{\partial^3 F}{\partial t^{n+1-\alpha}\partial t^{n+1-\omega}\partial t^{\eta}} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial t^{n+1-\beta}\partial t^{n+1-\gamma}\partial t^{\omega}}\Big) = \sum_{\omega} h^{\beta\omega}\widetilde{\Gamma}^{\alpha\gamma}_{\omega}.$$

□

Теорема 12.1. *Пара (g^*, h^*) является связкой плоских кометрик.*

Proof. Пусть $(t^1, ..., t^n)$ — плоские квазиоднородные координаты структуры (F, E). Тогда $g^{ij} = \delta^{i+j,n+1}$ и символы Кристоффеля кометрики g^* равны 0.

Таким образом, надо доказать, что для каждого λ кометрика $\tilde{g}^* = g^* + \lambda h^*$ является плоской и ее символы Кристоффеля $\widetilde{\Gamma}^{\alpha\beta}_{\gamma}$ равны $\lambda\Gamma^{\alpha\beta}_{\gamma}$, где $\Gamma^{\alpha\beta}_{\gamma}$ — символы Кристоффеля кометрики h^*.

Уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t^{\gamma}}\tilde{g}^{\alpha\beta} = \widetilde{\Gamma}^{\alpha\beta}_{\gamma} + \widetilde{\Gamma}^{\beta\alpha}_{\gamma} \quad \text{и} \quad \sum_{s}\tilde{g}^{\alpha\omega}\widetilde{\Gamma}^{\beta\gamma}_{\omega} = \sum_{s}\tilde{g}^{\beta\omega}\widetilde{\Gamma}^{\alpha\gamma}_{\omega}$$

полностью определяют числа $\widetilde{\Gamma}^{\alpha\beta}_{\gamma}$. Докажем, что $\lambda\Gamma^{\alpha\beta}_{\gamma}$ удовлетворяют этим уравнениям.

Согласно лемме 12.2, мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial t^{\gamma}}\widetilde{g}^{\alpha\beta} = \lambda\frac{\partial}{\partial t^{\gamma}} h^{\alpha\beta} = \lambda(\Gamma^{\alpha\beta}_{\gamma} + \Gamma^{\beta\alpha}_{\gamma})$$

и, согласно леммам 12.3, 12.2

$$\sum_{\omega}\widetilde{g}^{\alpha\omega}(\lambda\Gamma^{\beta\gamma}_{\omega}) = \lambda\sum_{\omega} g^{\alpha\omega}\Gamma^{\beta\gamma}_{\omega} + \lambda^2\sum_{\omega} h^{\alpha\omega}\Gamma^{\beta\gamma}_{\omega} =$$

$$= \lambda\Gamma^{\beta\gamma}_{n+1-\alpha} + \lambda^2\sum_{\omega} h^{\alpha\omega}\Gamma^{\beta\gamma}_{\omega} = \lambda\Gamma^{\alpha\gamma}_{n+1-\beta} + \lambda^2\sum_{\omega} h^{\beta\omega}\Gamma^{\alpha\gamma}_{\omega} =$$

$$= \lambda\sum_{\omega} g^{\beta\omega}\Gamma^{\alpha\gamma}_{\omega} + \lambda^2\sum_{\omega} h^{\beta\omega}\Gamma^{\alpha\gamma}_{\omega} = \sum_{\omega}\widetilde{g}^{\beta\omega}(\lambda\Gamma^{\alpha\gamma}_{\omega}).$$

Следовательно, $\widetilde{\Gamma}^{\alpha\beta}_{\gamma} = \lambda\Gamma^{\alpha\beta_{\gamma}}$. Кроме того, согласно леммам 12.2 и 12.3,

$$\sum_s \widetilde{g}^{is}\Big(\frac{\partial\widetilde{\Gamma}^{jk}_{\ell}}{\partial t^s} - \frac{\partial\widetilde{\Gamma}^{jk}_{s}}{\partial t^\ell}\Big) + \sum_s \widetilde{\Gamma}^{ij}_{s}\widetilde{\Gamma}^{sk}_{\ell} - \sum_s \widetilde{\Gamma}^{ik}_{s}\widetilde{\Gamma}^{sj}_{\ell} =$$

$$= \lambda\sum_s (g^{is} + \lambda h^{is})\Big(\frac{\partial\Gamma^{jk}_{\ell}}{\partial t^s} - \frac{\partial\Gamma^{jk}_{s}}{\partial t^\ell}\Big) + \lambda^2\Big(\sum_s \Gamma^{ij}_{s}\Gamma^{sk}_{\ell} - \sum_s \Gamma^{ik}_{s}\Gamma^{sj}_{\ell}\Big) =$$

$$= \lambda\sum_s g^{is}\Big(\frac{\partial\Gamma^{jk}_{\ell}}{\partial t^s} - \frac{\partial\Gamma^{jk}_{s}}{\partial t^\ell}\Big) = \lambda\Big(\frac{\partial\Gamma^{jk}_{\ell}}{\partial t^{n+1-i}} - \frac{\partial\Gamma^{jk}_{s+1-i}}{\partial t^\ell}\Big) = 0.$$

Таким образом, согласно упражнению 12.1, кометрика $\widetilde{g}^*$ является плоской. □

Согласно [6] верно и обратное утверждение: *Всякая однородная вязка плоских кометрик порождается некоторой структурой Дубровина.*

13. Структура Дубровина на пространствах орбит групп Кокстера

Напомним (см.например [3]) теорию конечных групп Кокстера. Пусть V — вещественное конечномерное векторное пространство с невырожденной билинейной формой $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\otimes V \to \mathbb{R}$. Отображение $S_r : V \to V$, где $r \in V$,

$$S_r(x) = x - \frac{2\langle x, r\rangle}{\langle r, r\rangle} r$$

называется отражением. Конечную группу, порожденную отражениями, назовем *группой Кокстера.*

Пусть W — группа Кокстера и $S_r \in W$ — отражение. Множество t_r неподвижных точек S_r назовем стенкой. Пусть T — множество всех стенок. Связная компонента множества $V \setminus T$ называется камерой. Стенки $(t_{r_1}, ..., t_{r_n})$, ограничивающие камеру C, называются стенками камеры C. Пара $(W, \{S_{r_1}, ..., S_{r_n}\})$ называется системой Кокстера.

Пусть $(W, \{S_{r_1}, ..., S_{r_n}\})$ — система Кокстера. Рассмотрим граф с вершинами $r_1, ..., r_n$ и ребрами ℓ_{ij}, соединяющими r_i и r_j, если и только если $S_{r_n}S_{r_j} \neq S_{r_j}S_{r_i}$. Пусть m_{ij} — порядок элемента $(S_{r_n}S_{r_j})$. При $m_{ij} > 3$ напишем над ℓ_{ij} число m_{ij}. Полученный граф называется диаграммой Дынкина $(W, \{S_{r_1}, ..., S_{r_n}\})$. Система Кокстера $(W, \{S_{r_1}, ..., S_{r_n}\})$ называется простой, если диаграмма Дынкина связна. Простая система Кокстера называется неприводимой, если $\dim V = n$.

Теорема 13.1. *(Кокстер). 1) Каждая система Кокстера является прямым произведением неприводимых систем Кокстера.*

2) Диаграмма Дынкина всякой неприводимой системы Кокстера принадлежит к одному из типов, перечисленных на рис.1 (через n обозначено число вершин).

Определение 13.1. *Пусть $(W, \{S_{r_1}, ..., S_{r_n}\})$ — система Кокстера. Элемент $S = S_{r_1}\cdot ... \cdot S_{r_n}$ называется элементом Кокстера. Перенумерация r_i переводит S в сопряженный элемент. Порядок ρ элемента S называется числом Кокстера. Собственные значения линейного оператора $S : V \to V$ равны* $\exp(2\pi\sqrt{-1}m_i/\rho)$, *где $m_i \in Z$, $\rho > m_1 \geq \cdots \geq m_n = 1$ и $m_i + m_{n+1-i} = \rho$. Числа m_i называются показателями системы Кокстера.*

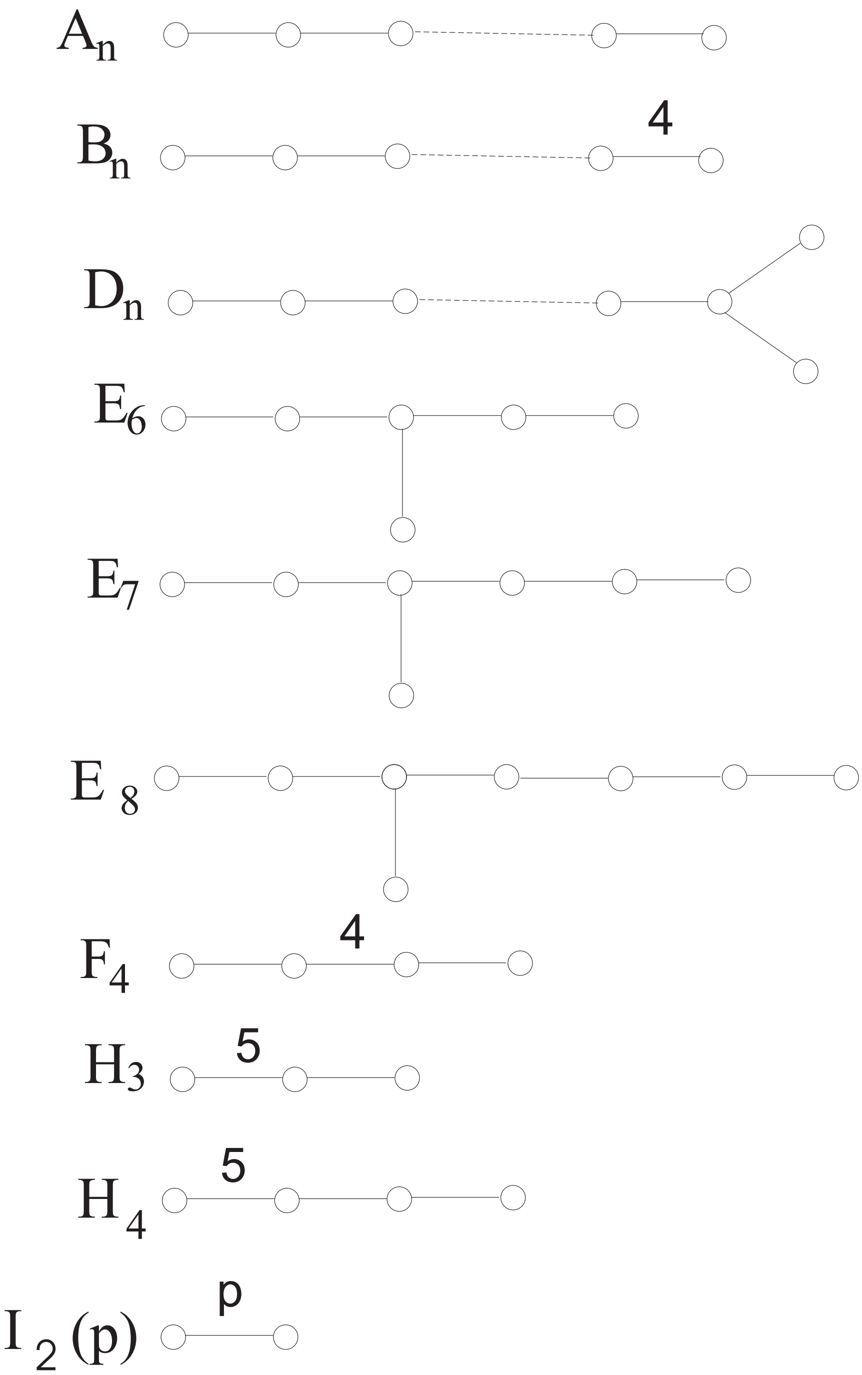

Рис.1

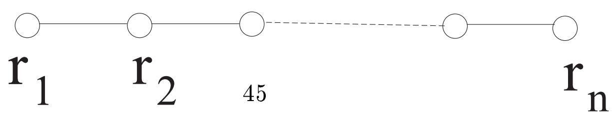

Рис.2

Теорема 13.2. *(Кокстер) Показатели равны:*
$A_n : m_i = n + 1 - i$;
$B_n : m_i = 2(n - i) + 1$;
$D_n = D_{2k} : m_i = 2(n - i) - 1$ *при* $i \leq k,\ m_i = 2(n - i) + 1$ *при* $i > k$*;*
$D_n = D_{2k+1} : m_i = 2(n - i) - 1$ *при* $i \leq k,\ m_{k+1} = 2k; m_i = 2(n - i) + 1, i > k + 1$*;*
$E_6 : 11, 8, 7, 5, 4, 1$;
$E_7 : 17, 13, 11, 9, 7, 5, 1$;
$E_8 : 29, 23.19, 17, 13, 11, 7, 1$;
$F_4 : 11, 7, 5, 1$;
$H_3 : 9, 5, 1$;
$H_4 : 29, 19, 11, 1$;
$I_2(k) : k - 1, 1$.

Пусть $(W, \{S_{r_1}, ..., S_{r_n}\})$ — неприводимая система Кокстера на $V \cong \mathbb{R}^n$. Стандартные координаты на $\mathbb{R}^n$ порождают функции $z^1, ..., z^n$ на $V \otimes C$. Пусть $P = \{F\}$ — множество многочленов вида $F(z^1, ..., z^n)$. Для $g \in W$ и $f \in P$ положим $(gf)(z) = f(g(z))$. Тогда W действует на P. Положим

$$P^W = \{f \in P | gf = f \ \text{ для всех } \ g \in W\}.$$

Теорема 13.3. *(Кокстер) Пусть*

$$(W, \{S_{r_1}, ..., S_{r_n}\})$$

— система Кокстера с показателями $m_1, ..., m_n$*. Тогда алгебра* P^W *порождается полиномами* $y^1, ..., y^n$ *степени* $d_i = m_i + 1$.

Полиномы $y^1, ..., y^n$ образуют координаты в пространстве $M = (V \otimes \mathbb{C})/W$. В следующем параграфе мы докажем, что M имеет естественную структуру Дубровина. Проиллюстрируем этот факт для группы A_n.

Пример 13.1. *Пусть*

$$V = \left\{ (z_1, ..., z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| \sum_{i=1}^{n+1} z_i = 0 \right\}$$

и

$$\langle (x_1, ..., x_{n+1}), (y_1, ..., y_{n+1}) \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i.$$

Рассмотрим

$$e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

и

$$r_i = e_i - e_{i+1} \in V \quad (i = 1, ..., n).$$

Тогда для $z = (z_1, ..., z_{n+1})$ *имеем*

$$S_{r_i}(z) = (z_1, ..., z_{i-1}, z_{i+1}, z_i, z_{i+2}, ..., z_{n+1}).$$

Стало быть, W *является группой перестановок координат. В частности,* $S_{r_i} S_{r_j} = S_{r_j} S_{r_i}$*, если* $|i - j| > 1$ *и* $(S_{r_i} S_{r_j})^3 = 1$*, если* $|i - j| = 1$*. Таким образом, диаграмма Дынкина* $(W\{S_1, ..., S_n\})$ *такова как на рис.2 и совпадает с диаграммой Дынкина системы Кокстера* A_n.

Элемент Кокстера S *действует по формуле*

$$S(z_1, ..., z_{n+1}) = S_{r_1} \cdots S_{r_n}(z_1, ..., z_{n+1}) = (z_{n+1}, z_1, ..., z_n),$$

число Кокстера равно $n+1$. Показатели равны $n, n-1, ..., 1$.

Алгебра P^W является алгеброй симметрических многочленов, то есть многочленов, удовлетворяющих тождеству

$$f(z_1, ..., z_{n+1}) = f(z_{\sigma(1)}, ..., z_{\sigma(n+1)}),$$

где

$$\sigma : (1, ..., n+1) \to (1, ..., n+1)$$

— любая перестановка. Базис P^W состоит из многочленов

$$y_1 = z_1 + ... + z_{n+1}; \quad y_2 = \sum_{i,j} z_i z_j; ... \quad y_{n+1} = z_1 ... z_n z_{n+1}.$$

Рассмотрим теперь пространство $M = V \otimes \mathbb{C}/W$. Точка $\rho \in M$ — это неупорядоченный набор

$$(z_1, ..., z_{n+1}), \qquad z_i \in \mathbb{C}, \quad \sum_i z_i = 0.$$

Тогда отображение

$$\varphi(z_1, ..., z_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1}(z + z_i) = z^{n+1} + y_2(z_1, ..., z_{n+1})z^{n-1} + .. + y_{n+1}(z_1, ..., z_{n+1})$$

порождает биекцию $\varphi : M \to M_n$ на пространство многочленов

$$M_n = \{z^{n+1} + a_1 z^{n-1} + ... + a_n\}$$

из примера 2.2. Таким образом, пространство орбит группы A_n имеет естественную структуру Дубровина.

Перейдем теперь к общему случаю. Пусть W —- группа Кокстера на $\mathbb{R}^n$, $(z^1, ..., z^n)$ — естественные координаты на $V = \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{C}, W$ — групп Кокстера на $\mathbb{R}^n$ и $y^1, ..., y^n$ — образующие алгебры многочленов, инвариантных относительно W. Эти многочлены задают координаты на $M = V/W$. Их степени равны $\deg y^i = m_i + 1$, где $m_1 \geq \dots \geq m_n = 1$ — показатели системы Кокстера.

Рассмотрим плоскую кометрику

$$h^* = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z^k} \otimes \frac{\partial}{\partial z^k}.$$

В координатах $(y^1, ..., y^n)$ она имеет вид

$$h^* = \sum_{ij} h^{ij} \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes \frac{\partial}{\partial y^j},$$

где

$$h^{ij} = h^*(dy^i, dy^j) = \sum_k \frac{\partial y^i}{\partial z^k} \cdot \frac{\partial y^j}{\partial z^k}.$$

Задача 13.1. *Доказать, что символы Кристоффеля кометрики h^* в координатах $y^1, ..., y^n$ имеют вид*

$$\Gamma_k^{ij} = \sum_{m,\ell} \frac{\partial y^i}{\partial z^m} \cdot \frac{\partial^2 y^j}{\partial z^m \partial z^\ell} \cdot \frac{\partial z^\ell}{\partial y^k}.$$

Лемма 13.1. *Функции h^{ij} и Γ^{ij}_k являются многочленами от переменных $y^1, ..., y^n$.*

Proof. Прямое вычисление показывает, что h^{ij} являются многочленами от $z^1, ..., z^n$. Тензоры h^* и dy^j инвариантны относительно W. Следовательно, функции $h^{ij} = h^*(dy^i, dy^j)$ являются многочленами относительно $z^1, ..., z^n$, инвариантными относительно W. Но $y^1, ..., y^n$ — образующие алгебры инвариантных многочленов. Следовательно, функции h^{ij} являются многочленами относительно $y^1, ..., y^n$. Аналогичные аргументы показывают, что функции Γ^{ij}_k также являются многочленами от $y^1, ..., y^n$. □

Положим теперь

$$g^{ij} = \frac{\partial h^{ij}}{\partial y^1}.$$

Задача 13.2. *Доказать, что*

$$g^{ij}(y) = 0, \quad \textit{если} \ \ i + j > n + 1,$$

$$g^{ij}(y) = const, \quad \textit{если} \ \ i + j = n + 1,$$

и deg $g^{ij} \neq 0$.

Кометрика

$$g^* = \sum g^{ij} \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes \frac{\partial}{\partial y^j}$$

была найдена в работе [14] В этой работе Саито нашел также плоские координаты $t^1(z), ..., t^n(z)$ для этой метрики в виде полиномов $t^i(z)$ степени $m_i + 1$ и доказал, что они образуют базис в алгебре полиномов, инвариантных относительно W. При этом

$$t^n = \frac{1}{2\rho} \sum_{i=1}^{n} (z^i)^2 \ \ \text{и} \ \ g(dt^\alpha, dt^\beta) = \delta^{\alpha+\beta, n+1}.$$

Эти координаты называются координатами Саито.

Задача 13.3. *Доказать, что координаты Саито существуют.*

Задача 13.4. *Пусть $t^1, ..., t^n$ — координаты Саито. Тогда*

$$h(dt^n, dt^\alpha) = \frac{m_\alpha + 1}{\rho} t^\alpha, \quad \Gamma^{n\alpha}_\beta = \frac{m_\alpha}{\rho} \delta^\alpha_\beta.$$

Теорема 13.4. *Пара (g^{ij}, h^{ij}) образует связку плоских кометрик на M.*

Proof. Рассмотрим степени многочленов

$$h^{ij}(z^1, ..., z^n) \ \ \text{и} \ \ y^i(z^1, ..., z^n).$$

Имеем

$$\deg\, h^{ij} = \deg\, \sum \frac{\partial y^i}{\partial z^k} \cdot \frac{\partial y^j}{\partial z^k} = \deg\, y^i + \deg\, y^i - 2 \leq 2 \deg\, y^1 - 2.$$

Следовательно, полиномы $h^{ij}(y^1, ..., y^n)$ линейно зависят от y^1. Аналогично Γ^{ij}_k также линейно зависят от y^1. Согласно задаче 12.2 отсюда следует, что (g^{ij}, h^{ij}) — связка плоских кометрик. □

Согласно результатам предыдущего параграфа отсюда следует.

Теорема 13.5. *Пусть $t^1, ..., t^n$ — координаты Саито на $M = V/W$ и*
$$E = \frac{1}{\rho}\sum(m_\alpha + 1)t^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}.$$
Тогда

1) Существует многочлен $F = F(t^1, ..., t^n)$ такой, что
$$h^*(dt^\alpha, dt^\beta) = \frac{m_\alpha + m_\beta}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial t^{n+1-\alpha} \partial t^{n+1-\beta}} \quad и \quad L_E F = 2\frac{(\rho+1)}{\rho}F;$$

2) (F, E) является решением уравнений WDVV.

Пример 13.2. *Пары (F, E), соответствующие A_3, B_3, H_3 — это*
$$F = \frac{(t^1)^2 t^3 + t^1(t^2)^2}{2} + a(t^2)^2(t^3)^2 + \frac{16}{60}a^2(t^3)^5,$$
$$E = t^1\frac{\partial}{\partial t^1} + \frac{3}{4}t^2\frac{\partial}{\partial t^2} + \frac{1}{2}t^3\frac{\partial}{\partial t^3} \qquad (A_3);$$
$$F = \frac{(t^1)^2 t^3 + t^1(t^2)^2}{2} + a(t^2)^3 t^3 + 6a^2(t^2)^2(t^3)^3 + \frac{1296}{210}a^4(t^3)^7,$$
$$E = t^1\frac{\partial}{\partial t^1} + \frac{2}{3}t^2\frac{\partial}{\partial t^2} + \frac{1}{3}t^3\frac{\partial}{\partial t^3} \qquad (B_3);$$
$$F = \frac{(t^1)^2 t^3 + t^1(t^2)^2}{2} + a(t^2)^3(t^3)^2 + \frac{36}{20}a^2(t^2)^2(t^3)^5 + \frac{1296}{3960}a^4(t^3)^{11},$$
$$E = t^1\frac{\partial}{\partial t^1} + \frac{3}{5}t^2\frac{\partial}{\partial t^2} + \frac{1}{5}t^3\frac{\partial}{\partial t^3} \qquad (H_3).$$

Можно доказать, что пары (F, E), отвечающие пространствам орбит групп Кокстера, дают полный список структур Дубровина с полиномиальным потенциалом F. Эти же потенциалы являются потенциалами структур Дубровина отвечающих одноименным простым особенностям. Для особенностей A_n эти структуры были построены в примере 2.2. Алгоритм для вычисления соответствующих потенциалов предложен в [11]

References

[1] Alexeevski A., Natanzon S., Noncommutativ two-dimensional topological field theories and Hurwitz numbers for real algebraic curves. Selecta Math., New ser. v.12,n.3, 2006, p. 307-377 (arXiv: math.GT/0202164).

[2] Atiyah M., Topological Quantum Field Theories, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 68 (1988), 175-186.

[3] Н.Бурбаки "Группы и алгебры Ли", главы IV-VI, М.: Мир, 1972.

[4] Dijkgraaf R., Geometrical approach to two-dimentional conformal field theory. Ph.D.Thesis, Utrecht, 1989.

[5] B.Dubrovin, Geometry of 2D topological field theories, Springer, Let. Notes in Math. 1620(1996), 120-348.

[6] B.Dubrovin, Flat pencils of metrics and Frobenius manifolds, arXiv:math/9803106

[7] S.Keel "Intersection theory of moduli spaces of stable n-pointed curves of genus zero" Tans.AMS,330(1992),545-574.

[8] M.Kontsevch, Yu.Manin "Gromov-Witten classes, quantom cogomology, and enumerative geometry", Comm.Math.Phys.,196 (1998),385-398.

[9] S.Natanzon, "Extended cohomological field theories and noncommutative Frobenius manifolds", Geometry and Physics, 51 / 4, (2004), 387-403.

[10] S.Natanzon, "Singularities and noncommutative Frobenius manifolds", Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2007, v.259, p.137-148

[11] S. Natanzon, *Formulas for A_n and B_n-solutions of WDVV equations*, J. Geom. Phys **39** (2001) 323-336.

[12] S.Natanzon, V.Turaev "Systems of correlatos and solutions of WDVV equations" Comm.Math.Phys. 196(1998), 399-410

[13] Y.Ruan, G.Tian "A mathematical theory of quantom cogomology" Jor.Diff.Geom. 42(1995), 259-367

[14] K.Saito, On a linear structure of a quotient variety by a finite reflection group, Preprint RIMS-288 (1979)).

[15] К.Фейс "Алгебра: кольца модули и категории" Москва "Мир" 1977г

[16] Ю.И.Манин "Фробениусовы многообразия" Москва "Факториал пресс" 2002г

[17] С.М.Натанзон "Геометрия двумерных топологических теорий поля" Москва, МЦНМО, МК НМУ 1998г