

ЛИСТОК 10. РЯДЫ ФУРЬЕ

АНАЛИЗ, 2 КУРС, 24.04.2015

- 10◊1** а) Разложите функцию $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$. Запишите равенство Парсеваля.
 б) В каких точках этого отрезка ряд Фурье сходится к значению самой функции в этой точке?
 в) Те же вопросы для функции $f(x) = \frac{1}{5-4\cos x}$.
- 10◊2** Найдите хотя бы одно решение $u(x, t)$ дифференциального уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на полуплоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ с указанным начальным условием:
 а) $u(x, 0) = \cos x$; б) $u(x, 0) = \cos 2x$; в) $u(x, 0) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$; г) $u(x, 0) = \frac{1}{5-4\cos x}$.
Указание. Попробуйте сначала искать решение в виде $u(x, t) = u(x, 0)f(t)$.
- 10◊3** Найдите необходимые и достаточные условия на последовательность $\{c_k\}$ для того, чтобы она была последовательностью коэффициентов Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$:
 а) некоторого тригонометрического многочлена (т.е. многочлена от $\cos x$ и $\sin x$) степени не более n ;
 б) некоторого многочлена степени не более n , заданного на полуинтервале $(-\pi, \pi]$ и периодически продолженного на \mathbb{R} .
 Обозначим через $L_2(S^1)$ множество 2π -периодических измеримых функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, для которых существует $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$. Обозначим через $L_2(\mathbb{Z})$ множество функций $c: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, для которых существует $\sum_{-\infty}^{\infty} |c(n)|^2$. Для функции $f \in L_2(S^1)$ обозначим через $F(f) = \hat{f}$ последовательность ее коэффициентов Фурье: $\hat{f}(n) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx$. Через $(f * g)(x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy$ и $(c * d)(n) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} c(m)d(n-m)$ обозначим *свертку* функций $f(x), g(x) \in L_2(S^1)$ и $c(n), d(n) \in L_2(\mathbb{Z})$.
- 10◊4** а) Вычислите $e^{inx} * e^{imx}$.
 б) Вычислите $f * f$, где функция $f(x)$ задана на полуинтервале $(-\pi, \pi]$ формулой $f(x) = x$ и периодически продолжена на \mathbb{R} .
 в) Вычислите $c(k) * d(k)$, где $c(k) = k\delta_{k,a}$ и $d(k) = k\delta_{k,b}$.
 г) Докажите равенство $F(f * g) = F(f)F(g)$ для любых $f, g \in L_2(S^1)$.
 д) * Докажите равенство $F(fg) = F(f) * F(g)$ для любых $f, g \in L_2(S^1)$.
 е) Докажите равенство $F(df/dx)(k) = ikF(f)(k)$ для любой $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L_2(S^1)$.
- 10◊5** Докажите, что если $f(x) \in C^N(\mathbb{R})$, то ряд $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^{2N} |\hat{f}(n)|^2$ абсолютно сходится.
 Преобразованием Фурье функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ назовем функцию $\hat{f}(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x) dx$. В следующей задаче этот интеграл понимается как главное значение несобственного интеграла Римана.
- 10◊6** Вычислите преобразование Фурье следующих функций, заданных на \mathbb{R} :
 а) $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} 1/x^2, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$; в) $f(x) = e^{-x^2/2}$.
- 10◊7** Найдите хотя бы одно решение $u(x, t)$ дифференциального уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на полуплоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ с заданным начальным условием:
 а) $u(x, 0) = x$; б) $u(x, 0) = x^2$; в) * $u(x, 0) = x^n$; г) $u(x, 0) = e^{-x^2/2}$.
- 10◊8** а) Докажите, что *многочлены Эрмита* $H_n(x) = (-1)^n e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{x^2}$ удовлетворяют дифференциальному уравнению $y'' - 2xy' + 2ny = 0$ на множестве \mathbb{R} .
 б) Найдите симметричный оператор L на пространстве $C^2(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\bar{g}(x)dx$, для которого $f(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}$ удовлетворяет уравнению $L(f) = nf$.
 в) Докажите, что при $m \neq n$ многочлены Эрмита H_m и H_n ортогональны относительно скалярного произведения $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\bar{g}(x)e^{-x^2} dx$ и вычислите $\langle H_n, H_n \rangle$.
 г) Объясните связь пунктов б) и в) с задачей 4 из листка 9.