

## Статистическая физика. Листок 2.1

Крайний срок сдачи 15.05.2013

### 1. Колебания одномерного кристалла.

$N + 1$  одинаковых точечных частиц массы  $m$  соединены в цепочку  $N$  упругими невесомыми пружинками с константой упругости  $K$  и длиной  $a$  в свободном состоянии. Первая и последняя частицы закреплены на расстоянии  $Na$  друг от друга. Обозначим продольные отклонения частиц от состояния равновесия  $\{u_i\}$ . Так как крайние частицы закреплены, имеем  $u_0 = u_N = 0$ . Гамильтониан системы зависящий от смещений  $\{u_i\}$  и сопряженных им импульсов  $\{p_i\}$  имеет вид

$$\mathcal{H}(\{p_i, u_i\}) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{K}{2} \left[ u_1^2 + \sum_{i=2}^{N-2} (u_i - u_{i+1})^2 + u_{N-1}^2 \right].$$

- (а) Используя Фурье-преобразование (разложение по синусам), найдите нормальные моды  $\{\tilde{u}_k\}$  и соответствующие частоты  $\{\omega_k\}$ .
- (б) Выразите гамильтониан через амплитуды нормальных мод и вычислите классическую статсумму. (Интегрирование по  $\{u_i\}$  можно распространить от  $-\infty$  до  $+\infty$ .)
- (в) Вычислите  $\langle |\tilde{u}_k|^2 \rangle$  и используйте результат, чтобы найти  $\langle u_i^2 \rangle$ . Постройте график получившегося среднеквадратичного отклонения каждой частицы как функцию её положения равновесия.
- (г) Как изменится результат, если закреплена только первая частица ( $u_0 = 0$ ), а последняя свободна. (Это задача намного проще, так как статсумму можно вычислить, перейдя от координат  $N$  частиц к длинам  $N - 1$  пружинки).

### 2. Обобщенный идеальный газ.

Рассмотрите газ невзаимодействующих бесспиновых квантовых частиц с энергетическим спектром  $\epsilon = |\vec{p}/\hbar|^s$ , находящийся в сосуде объема  $V$  в  $d$  измерениях.

- (а) Вычислите большой термодинамический потенциал  $\Omega^\eta = -kT \log \mathcal{Z}^\eta$  и плотность  $n = N/V$  при химическом потенциале  $\mu$ . Выразите ответ через  $s, d$  и функцию  $f_m^\eta(z)$ , где  $z = e^{\beta\mu}$ ,

$$f_m^\eta(z) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \frac{dx x^{m-1}}{z^{-1}e^x - \eta},$$

- а  $\eta$  полагается равной 1 или  $-1$  для бозонов и фермионов соответственно.
- (б) Найдите отношение  $pV/U$  и сравните с выражением для классического газа.
- (в) Для фермионов найдите зависимость удельной внутренней энергии  $U/N$  и давления  $p$  от плотности  $n = N/V$  при нулевой температуре. (Указание:  $f_m(z) \rightarrow (\ln z)^m/m!$  при  $z \rightarrow \infty$ ).
- (г) Для бозонов найдите размерность  $d_s$  ниже которой Бозе-конденсация отсутствует. Есть ли конденсация в  $d = 2$  при  $s = 2$ .

### 3. Парамагнетизм Паули.

Вычислите вклад спина в магнитную восприимчивость следующим образом. Рассмотрите невзаимодействующие электроны с одночастичным гамильтонианом

$$\mathcal{H}_1 = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \mu_0 \vec{\sigma} \cdot \vec{B},$$

где  $\mu_0 = e\hbar/2mc$ , и произведение  $\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$ , принимает два значения  $\pm B$ . (Взаимодействием орбитального момента с полем  $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A}$  можно пренебречь.)

- (а) Вычислите большой термодинамический потенциал  $\Omega^- = -kT \log \mathcal{Z}^-$  при химическом потенциале  $\mu$ .
- (б) Вычислите плотности  $n_+ = N_+/V$  и  $n_- = N_-/V$  электронов параллельных и антипараллельных полю.
- (в) Получите выражение для намагниченности  $M = \mu_0(N_+ - N_-)$  и напишите его разложение при малых  $B$ .
- (г) Найдите магнитную восприимчивость в нулевом магнитном поле  $\chi = \partial M / \partial B|_{B=0}$  и исследуйте её поведение при высоких и низких температурах.

### 4. Дираковские фермионы.

Рассмотрите газ невзаимодействующих частиц со спином  $1/2$ , в котором имеются пары одночастичных состояний с энергиями противоположного знака

$$\mathcal{E}_{\pm}(\vec{k}) = \pm \sqrt{m^2 c^4 + \hbar^2 k^2 c^2},$$

не зависящими от спина.

(а) Для произвольной фермионной системы с химическим потенциалом  $\mu$  покажите, что вероятность найти занятым состояние с энергией  $\mu + \delta$  равна вероятности найти незанятым состояние с энергией  $\mu - \delta$ . ( $\delta$  — постоянная энергия.)

(б) При нулевой температуре все отрицательные дираковские состояния заняты, а все положительные свободны, т.е.  $\mu(T = 0) = 0$ . Пользуясь результатом пункта (а) найдите химический потенциал при произвольной температуре  $T$ .

(в) Покажите, что средняя энергия такой системы при конечной температуре равна

$$U(T) - U(0) = 4V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathcal{E}_+(\vec{k})}{\exp(\beta \mathcal{E}_+(\vec{k})) + 1}$$

(г) Вычислите интеграл из пункта (в) для безмассовых частиц,  $m = 0$ .

(д) Найдите теплоемкость  $C_V$  безмассовых дираковских частиц.

(е) Опишите качественно поведение теплоемкости при низких температурах для частиц с массой.