

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО
6 АПРЕЛЯ 2015

1. Как выбрать локальный параметр на римановой поверхности аналитической функции $y = \sqrt{z^2 - 1}$ в окрестности точек а) $(y, z) = (\sqrt{3}, 2)$, б) $(y, z) = (0, 1)$, в) $(y, z) = (0, -1)$, г) бесконечно удаленных точек?

2. Как выбрать локальный параметр на римановой поверхности аналитической функции $y = \sqrt{z^3 + z}$ в окрестности точек, лежащих над а) $z = 2$, б) $z = 0$, в) $z = i$, г) $z = \infty$. Разложите функцию по степеням локального параметра в окрестности этих точек.

3. Как выбрать локальный параметр на римановой поверхности функции $y = \sqrt{z^4 - 1}$ в окрестности точек, лежащих над а) $z = 2$, б) $z = 1$, в) $z = \infty$.

4. Опишите римановы поверхности из задач 1-3 и найдите их род.

5. Найдите род римановой поверхности многозначной аналитической функции:

$$\text{а) } \sqrt{\sqrt{z} + 1}, \quad \text{б) } \sqrt[3]{\sqrt{z} - 1}, \quad \text{в) } \sqrt[n]{\frac{z-1}{z+1}}, \quad \text{г) } \sqrt[n]{\frac{z^2-1}{z^2+1}}.$$

6. Найдите род римановой поверхности многозначной аналитической функции: $y = \sqrt[m]{P_n(z)}$, где P_n – полином степени n без кратных корней, m, n – взаимно простые.

Задачи на применение теоремы Руше.

7. Сколько корней многочлена $z^4 - 5z + 1$ находится в круге $|z| < 1$? В кольце $1 < |z| < 2$?

8. Докажите, что уравнение $e^z = z + 2$ имеет в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} z < 0$) единственный (и при том действительный) корень.