Теория функций комплексного переменного
11 марта 2015

1. Рассмотрим аналитическое продолжение функции $f(z) = \sqrt{z^2+9}$, заданной в окрестности точки $z = 4$ условием $f(4) = 5$, вдоль а) полуокружности $|z| = 4$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, б) полуокружности $|z| = 4$, $\operatorname{Im} z < 0$, с) отрезка $[-4, 4]$. Чему равно $f(-4)$ во всех этих случаях?

2. Фиксируем какой-либо элемент функции $f(z) = \sqrt{z^2-9}$ в окрестности точки $z = 5$ и рассмотрим два способа его аналитического продолжения из точки $z = 5$ в точку $x \in [-3, 3]$: вдоль дуги полуокружности в верхней полуплоскости и вдоль дуги полуокружности в нижней полуплоскости. Результаты обозначим $f(x+i0)$ и $f(x-i0)$ соответственно. Как связаны между собой $f(x+i0)$ и $f(x-i0)$?

3. Найдите ошибку в следующем “доказательстве” (неверного) тождества $\log(-z) = \log z$. Из равенства $(-z)^2 = z^2$ после логарифмирования следует, что $2\log(-z) = 2\log z$, откуда $\log(-z) = \log z$. Чему на самом деле равен $\log(-x)$ при вещественном положительном x? (Рассмотреть аналитические продолжения вдоль дуг в верхней и нижней полуплоскости.)

4. Вычислите интегралы с помощью вычетов:
а) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{x}}\, dx$.

5. Вычислите интеграл с помощью вычетов: $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\, dx \quad (0 < \alpha < 1)$.

Аналогично можно вычислять и другие интегралы вида $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1} R(x)\, dx$, где $R(x)$ – рациональная функция.

6. Вычислите интеграл с помощью вычетов: $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\log x}{x^2+a^2}\, dx$ при $a > 0$.