Теория функций комплексного переменного
30 марта 2015

1. Разложим функцию $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = a$ ($|a| < 1$). При каких a это разложение позволяет аналитически продолжить функцию f за пределы единичного круга?

2. Найдите особые точки у аналитических функций и укажите их тип:
а) $\cos\sqrt{z}$, б) $\sqrt[n]{e^z}$, в) $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{z}} - \sqrt{2}}$, г) $\sqrt[3]{\sqrt{z} - 4}$.

3. Исследуйте поведение каждой из однозначных ветвей заданных аналитических функций в окрестности указанных точек и определите тип особенностей (если они есть):
а) $\dfrac{z}{1+\sqrt{z-3}}$, $z = 4$, б) $z + \sqrt{z^2 - 1}$, $z = \infty$, в) $\dfrac{2z+3}{1+z-2\sqrt{z}}$, $z = 1$,
г) $\cos\dfrac{1}{1+\sqrt{z}}$, $z = 1$, д) $\sin\dfrac{1}{1+\sqrt{z/(z-1)}}$, $z = \infty$.

4. Найдите вычеты $\mathrm{res}_{z=1}(f(z)dz)$ для каждой из однозначных ветвей функции а) $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2-z}+1}$, б) $f(z) = \exp\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{z}}\right)$.

5. Разложите аналитическую функцию в ряд по степеням локального параметра в окрестности всех точек ее римановой поверхности, расположенных над данными точками:
а) $w = \dfrac{1}{1+\sqrt{2-z}}$, $z = 1, z = 2$, б) $w = \sqrt{\sqrt{z-1} - 2}$, $z = 1, z = 5, z = \infty$
(достаточно найти первые два-три члена).

6. Как выбрать локальный параметр на римановой поверхности функции $y = \sqrt{z^3 - z}$ в окрестности точек а) $(y, z) = (\sqrt{6}, 2)$, б) $(y, z) = (-\sqrt{6}, 2)$, в) $(y, z) = (0, 0)$, г) $(y, z) = (0, 1)$, д) бесконечно удаленной точки.

Задачи на применение теоремы Руше.

7. Сколько корней многочлена $z^4 - 5z + 1$ находится в круге $|z| < 1$? В кольце $1 < |z| < 2$?

8. Докажите, что уравнение $e^z = z + 2$ имеет в левой полуплоскости ($\mathrm{Re}\, z < 0$) единственный (и при том действительный) корень.