Дискретная математика
Семинар 15
ВШЭ, факультет математики
первый курс, четвёртый модуль

Напомним теорему Пойа. Пусть F – некоторое множество объектов (например, множество деревьев) и $w : F \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ – функция (например, число вершин в дереве). Пусть $F(x) = \sum_{f \in F} x^{w(f)}$. Зафиксируем число $r > 0$ и рассмотрим некоторую подгруппу $G \subset S_r$. Группа G действует на множестве F^r, переставляя элементы. Назовём два элемента $a, b \in F^r$ G-эквивалентными, если $\exists g \in G$, такой что $g(a) = b$. Другими словами, G-эквивалентные элементы лежат в одной орбите действия G на множестве F^r. Обозначим через $[F^r] \subset F^r$ максимальный набор попарно неэквивалентных элементов. Другими словами, элементы $[F^r]$ нумеруют G-орбиты на множестве F^r.

Пусть $a = (f_1, \dots, f_r)$. Определим $w(a) = \sum_{i=1}^{r} w(f_i)$ и положим $C(x) = \sum_{a \in [F^r]} x^{w(a)}$. Тогда теорема Пойа утверждает, что

$$C(x) = Z_G(F(x), F(x^2), F(x^3), \dots).$$

1. Вычислите $Z_{S_3}(1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3)$ и $Z_{A_3}(1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3)$.

2. Докажите, что $Z_{S_n}(1+x, 1+x^2, \dots) = Z_{A_n}(1+x, 1+x^2, \dots) = 1+x+\dots+x^n$.

3. Рассмотрим подгруппу $G \subset S_n$. Докажите, что коэффициент при x^r в $Z_G(1+x, 1+x^2, \dots)$ равен числу G-эквивалентных классов подмножеств из r элементов множества $\{1, \dots, n\}$.

4. Пусть $E_n \subset S_n$ – единичная группа. Вычислите $Z_{E_n}(1+x, 1+x^2, \dots)$. Сравните ответ с предыдущей задачей.

5. Докажите, что

$$Z_{C_n} = n^{-1} \sum_{k|n} \varphi(k) y_k^{n/k}.$$

Докажите формулу для циклового индекса диэдральной группы $D_n \subset S_n$:

$$Z_{D_n} = \frac{1}{2} Z_{C_n} + \begin{cases} \frac{1}{2} y_1 y_2^{(n-1)/2}, & \text{если n нечётное,} \\ \frac{1}{4}(y_2^{n/2} + y_1^2 y_2^{(n-2)/2}), & \text{если n чётное.} \end{cases}$$

6. Вычислите $Z_{D_4}(1 + x, 1 + x^2, \dots)$.

7. Для всех $k = 0, 1, 2, 3, 4$, найдите количество разных ожерелий из бусин двух разных цветов, содержащих ровно k бусинок одного цвета и $4 - k$ бусинок другого цвета. Два ожерелья считаются одинаковыми, если одно можно получить из другого отражением или вращением нитки с бусинами.