

Семинар и задание 1 (1 апреля 2015)

22 апреля 2015 г.

Задача 1. Вычислите z^E , где E – нормализованный логарифм матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Опишите ветвление следующей матрицы при обходе нуля

$$Y(z) = \begin{pmatrix} z & z + z \ln z \\ z^2 & \frac{z}{z} + z^2 \ln z \end{pmatrix}.$$

Показать, что при обходе нуля она умножается справа на постоянную матрицу (какую?). Разложите матрицу $Y(z)$ в произведение трех матриц (слева направо): голоморфной обратимой; диагональной с мономимальными диагональными элементами; матрицы, отвечающей за ветвления. Выведите отсюда, что матрица $Y(z)$ – фундаментальная матрица системы уравнений на $\mathbb{C}$ с фуксовой особой точкой в нуле. Найдите главную часть (вычет) матрицы коэффициентов соответствующей фуксовой системы.

Задача 3. Найдите матрицы монодромии при обходе нуля у систем уравнений $\frac{dy}{dz} = B(z)y$, где

cw а) $B(z) = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 2 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

cw б) $B(z) = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 2 & z^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

hw в) $B(z) = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 3 & z & z^2 \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

hw д)* $B(z) = \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} 2 & z^3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Задача 4. Рассмотрим n -мерную линейную систему дифференциальных уравнений $\frac{dy}{dz} = \frac{B(z)}{z}y$ на области $V \subset \mathbb{C}$, $0 \in V$, с фуксовой особой точкой в нуле. Пусть матрица вычета $B(0)$ имеет различные собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Рассмотрим проективизацию: дифференциальное уравнение на $\mathbb{CP}^{n-1}$ -значную функцию, получаемое из исходной системы с помощью тавтологической проекции $\mathbb{C}^n \setminus 0 \rightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$. Проекции графиков решений системы касаются голоморфного векторного поля v на $\mathbb{CP}^{n-1} \times V$. Найдите поле v , его особые точки и собственные значения его линейных частей в особых точках. Решите задачу:

sw а) для $n = 2$.

hw б)* для любого n .