Динамические системы, семинар 01.04.2015

1. Построив дифференциальное уравнение и применив к нему теорему существования и единственности найти, какие значения не может принимать функция $y = \operatorname{tg} z$ на комплексной плоскости.

2. Найти общую формулу решения комплексного дифференциального уравнения:

a) $y' = f(z)y$ (просто общий случай)

b) $y' = \dfrac{\alpha}{z} y$ (порядок роста, комплексные степени, чему равно i^i?)

c) $y' = \dfrac{\alpha}{z^{k+1}} y$ (порядок роста)

d) $y' = \dfrac{\alpha + \beta z^k}{z^{k+1}} y$ (оценить результат до вычислений)

e) $y' = \left(\dfrac{\alpha_1}{z - a_1} + \cdots + \dfrac{\alpha_n}{z - a_n} \right) y$ (что в бесконечности?)

3. В условиях предыдущей задачи описать ветвление решений при аналитическом продолжении.

4. Пусть α, β иррациональные числа, $a_{1,2,3,4}$ произвольные комплексные. Показать, что график всякого ненулевого решения дифференциального уравнения

$$y' = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{z - a_1} + \frac{\alpha}{z - a_2} + \frac{i}{z - a_3} + \frac{i\beta}{z - a_4} \right) y$$

плотен в $\mathbb{C}^2$.

5. Найти общий вид решения дифференциального уравнения

$$y' = f(z)y + g(z)$$

и показать, что отображение потока за время t (комплексное) является комплексным аффинным преобразованием.

6. Уравнение $w' = aw + bw^2$ задаёт на комплексной плоскости (с координатой w) голоморфное векторное поле.

a) Показать, что это поле продолжается на бесконечность до голоморфного на всей сфере Римана.

b) Найти размерность пространства голоморфных векторных полей на сфере Римана.

c) Показать, что поток этого поля является однопараметрической подгруппой дробно-линейных преобразований.