# Динамические системы, семинар 08.04.2015

**1.** Уравнение $w' = aw + bw^2$ задаёт на комплексной плоскости (с координатой $w$) голоморфное векторное поле.

a) Показать, что это поле продолжается на бесконечность до голоморфного на всей сфере Римана.

b) Найти размерность пространства голоморфных векторных полей на сфере Римана.

c) Показать, что поток этого поля является однопараметрической подгруппой дробно-линейных преобразований.

**2.** Докажите, что фуксова система линейных уравнений

$$\frac{dy}{dz} = \left( \sum_{j=1}^{p} \frac{A_j}{z - z_j} \right) y, \ A_j \in End(\mathbb{C}^n)$$

a. не имеет особой точки на бесконечности, если и только если $\sum_j A_j = 0$.

b. если имеет особую точку на бесконечности, то она фуксова с вычетом $-\sum_j A_j$.

**3.** Найдите тип особой точки в бесконечности (фуксова, регулярная, иррегулярная) у системы уравнений $\frac{dy}{dz} = Ay$, $A \in End(\mathbb{C}^n)$, $A \neq 0$, где

a) $A$ имеет хотя бы одно ненулевое собственное значение;

b) $A$ нильпотентна.

**4.** Найдите тип особой точки в нуле и бесконечности (регулярна или нет) у двумерной системы уравнений $\frac{dy}{dz} = B(z)y$, $B(z) \in End(\mathbb{C}^2)$, где $B(z)$ – такое как ниже. Свести каждую из систем к скалярному уравнению второго порядка.

a) $B(z) = \frac{1}{z^2}\mathrm{diag}(1, z)$;

b) $B(z) = \frac{1}{z^2}\begin{pmatrix} z & 1 \\ z^2 & z \end{pmatrix}$;

c) $B(z) = \frac{1}{z^2}\begin{pmatrix} z & 1 \\ z^2 & 1 \end{pmatrix}$

d)* $B(z) = \frac{1}{z^2}\begin{pmatrix} z & 1 \\ z & z \end{pmatrix}$

**5.** Найдите характеристические показатели уравнений

a) $z^2y'' + zy' - 4y = 0$; в особой точке $z = 0$

b) $(z^2 - 1)y'' - y' + y = 0$ в особых точках $z = 1$ и $z = -1$.