Задачи по группам и алгебрам Ли – 10. Представления и их характеры.

Характером представления V группы G называется функция $\chi_V(g) := \mathrm{Tr}_V\, g$ на группе G.

1. Покажите, что $\chi_{U\oplus V}(g) = \chi_U(g) + \chi_V(g)$, $\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1})$ и $\chi_{U\otimes V}(g) = \chi_U(g)\chi_V(g)$.

2. а) Докажите, что характер представления группы является функцией, постоянной на классах сопряженности. **б)** Докажите, что характер представления компактной связной группы Ли однозначно определяется своим ограничением на максимальный тор $T \subset G$. **в)** Докажите, что это ограничение инвариантно относительно действия группы Вейля $W = N(T)/T$.

Для компактной группы Ли G корректно определено *скалярное произведение характеров* $(\chi_V, \chi_U) := \int_G \chi_V(g)\overline{\chi_U}(g)dg$.

3. Докажите, что характеры неприводимых комплексных представлений компактной группы Ли образуют ортонормированную систему в пространстве всех ее характеров. *Указание:* это повторение стандартного доказательства для конечных групп с заменой суммы на интеграл.

В дальнейшем G – связная компактная группа Ли, T – ее максимальный тор, $\mathfrak{g} := T_eG \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ – комплексификация алгебры Ли группы G, $\mathfrak{h} := T_eT \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ – комплексификация алгебры Ли максимального тора, $X = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^*)$ – решетка весов тора T, $\Delta \subset X$ – система корней группы G. Для $t \in T$ и $\lambda \in X$ обозначим t^λ значение веса λ на групповом элементе t.

4. Пусть V – конечномерное комплексное представление группы Ли G. **а)** Докажите, что имеет место разложение $V = \bigoplus\limits_{\nu\in X} V(\nu)$ такое, что $t(v) = t^\nu v$ для всех $t \in T$, $v \in V(\nu)$. Это разложение называется *весовым разложением* представления V, а подпространства $V(\nu)$ – *весовыми пространствами*. **б)** Докажите, что $\chi_V(t) = \sum\limits_{\nu\in X} t^\nu \dim V(\nu)$.

5. Вычислите характер представления V группы G, если **а)** $G = SU_2$, $V = S^n\mathbb{C}^2$; **б)** $G = SO_3(\mathbb{R})$, $V = \mathbb{C}^3$; **в)** $G = SU_3$, $V = \mathbb{C}^3$; **г)** $G = SU_3$, $V = (\mathbb{C}^3)^*$; **д)** $G = SU_3$, $V = S^2\mathbb{C}^3$.

Пусть H – произвольная гиперплоскость в пространстве $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, проходящая через точку 0 и не содержащая элементов множества Δ. Множество *положительных корней* Δ_+ – это множество всех корней, лежащих в одном из полупространств относительно гиперплоскости H. *Камерой Вейля* называется выпуклый конус $X_+ := \{\lambda \in X \mid (\alpha, \lambda) \geq 0\ \forall \alpha \in \Delta_+\}$. Множество X_+ является симплициальным конусом, грани которого заданы уравнениями $(\alpha_i, x) = 0$, $i = 1, \ldots, \dim \mathfrak{h}$ где α_i – некоторые элементы из Δ_+, называемые *простыми корнями*. Все положительные корни являются линейными комбинациями простых с целыми неотрицательными коэффициентами. Веса ω_i, заданные условием $(\omega_i, \alpha_j) = \delta_{ij}\frac{(\alpha_j,\alpha_j)}{2}$, называются *фундаментальными весами*, и образуют базис в решетке X. Отражения в простых корнях s_{α_i} порождают группу W. Решетка X есть объединение $\bigcup_{w\in W} w(X_+)$. Все эти данные $(\Delta_+, X_+, \alpha_i, \omega_i)$ с точностью до действия группы Вейля не зависят от выбора гиперплоскости H.

6. Для $G = SU_n$ найдите **а)** положительные корни; **б)** простые корни; **в)** камеру Вейля; **г)** фундаментальные веса.

Частичный порядок на решетке весов X определяется следующим образом: $\lambda \geq \mu$ если $\lambda - \mu$ есть сумма каких-нибудь положительных корней. Для представления V группы G, старшим весом называется такой вес $\lambda \in X$, что $V(\lambda) \neq 0$ и вес $\lambda \in X$ максимален с таким свойством.

7. а) Пусть $V = \mathbb{C}^n$ – тавтологическое представление группы SU_n. Докажите, что представления $\Lambda^k V$ для $k = 1, \ldots, n-1$ являются неприводимыми представлениями с фундаментальными старшими

весами. **б)** Докажите, что у группы SU_n существует неприводимое представление V_λ с любым старшим весом $\lambda \in X_+$, причем $\dim V_\lambda(\lambda) = 1$ и $V_\lambda(\nu) \neq 0$ только в случае $\nu \leq \lambda$. *Указание:* воспользуйтесь тензорным произведением.

8. а) Докажите, что пересечение любого класса сопряженности в группе G с максимальным тором T есть орбита группы Вейля W (таким образом, корректно определено отображение $\pi : G \to T/W$, переводящее $g \in G$ в пересечение класса сопряженности элемента g с тором T). **б)** Элемент $g \in G$ называется *регулярным*, если его цетрализатор является тором (автоматически максимальным). Докажите, что множество G_{reg} регулярных элементов группы G есть $\pi^{-1}(T_{reg}/W)$ и, таким образом, является в G открытым подмножеством полной меры. **в)** Докажите, что G_{reg} инвариантно относительно действия G сопряжениями и диффеоморфно $(T_{reg} \times G)/N(T) = (T_{reg} \times (G/T))/W$ (группа $N(T)$ действует на первом сомножителе сопряжениями, а на втором справа). *Указание:* покажите, что класс сопряженности регулярного элемента есть G/T. Искомый диффеоморфизм дается отображением $\varphi : (T_{reg} \times G)/N(T) \to G_{reg},\ t \times g \mapsto gtg^{-1}$. **г)** Пусть $\alpha \in \Delta$. Вычислите значение поля скоростей элемента $e_\alpha - e_{-\alpha} \in \mathfrak{g}$ в точке $t \in T$ при действии группы G на себе сопряжениями. **д)** Вычислите дифференциал диффеоморфизма $\varphi : (T_{reg} \times (G/T))/W \to G_{reg}$ точке $t \times eT$.

9. а) Докажите, что на однородном пространстве G/T существует единственная с точностью до пропорциональности G-инвариантная дифференциальная форма старшей степени. Зафиксируем такую форму и обозначим ее ω. **б)** Докажите, что ω косоинвариантна относительно правого действия W на G/T. **в)** Пусть μ_G – мера Хаара на группе G, а μ_T – мера Хаара на торе T. Докажите, что на многообразии $(T_{reg} \times (G/T))/W$ имеем $\varphi^*\mu_G = p\mu_T \wedge \omega$, где $p : T \to \mathbb{R}$ – функция, косоинвариантная относительно действия W. **г)** Пользуясь предыдущей задачей, докажите, что $p(t) = \prod\limits_{\alpha \in \Delta_+} (t^{\frac{\alpha}{2}} - t^{-\frac{\alpha}{2}})$ с точностью до постоянного множителя.

10. а) Докажите, что характеры неприводимых представлений группы G как функции на T/W образуют ортонормированную систему относительно скалярного произведения $(f, g) := \frac{1}{|W|} \int_T f(t)\overline{g(t)}p(t)\mu_T$. **б)** Докажите, в предположении утверждения задачи 7б (на самом деле, оно всегда выполнено), что характеры представлений V_λ являются ортогонализацией мономиального базиса в функциях на T/W относительно скалярного произведения $(f, g) := \int_T f(t)\overline{g(t)p(t)\mu_T}$. *Указание:* введите линейный порядок на весах, согласованный с имеющимся частичным, и воспользуйтесь индукцией по этому порядку. **в)** Докажите *формулу Вейля для характера:* $\chi_{V_\lambda}(t) = \frac{\sum\limits_{w \in W} (-1)^w t^{w(\lambda+\rho)}}{\prod\limits_{\alpha \in \Delta_+} (t^{\frac{\alpha}{2}} - t^{-\frac{\alpha}{2}})}$, где по определению $\rho = \frac{1}{2} \sum\limits_{\alpha \in \Delta_+} \alpha$, а $(-1)^w$ есть определитель элемента $w \in W$ при действии на пространстве $\mathfrak{h}$. **в)** Докажите, что все неприводимые представления группы G имеют вид V_λ.

11. а) Докажите *формулу Вейля для знаменателя:* $\prod\limits_{\alpha \in \Delta_+} (t^{\frac{\alpha}{2}} - t^{-\frac{\alpha}{2}}) = \sum\limits_{w \in W} (-1)^w t^{w(\rho)}$. *Указание:* вычислите характер тривиального представления по формуле Вейля. **б)** Докажите *формулу Вейля для размерности:* $\dim V_\lambda = \frac{\prod\limits_{\alpha \in \Delta_+} (\lambda+\rho, \alpha)}{\prod\limits_{\alpha \in \Delta_+} (\rho, \alpha)}$. *Указание:* надо вычислить значение характера $\chi_{V_\lambda}(t)$ при $t = 1$. Примените к $\chi_{V_\lambda}(t)$ гомоморфизм из кольца функций на торе T в кольцо $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$, действующий как $t^\mu \mapsto z^{(\rho,\mu)}$, а затем воспользуйтесь формулой Вейля для знаменателя и правилом Лопиталя.

12. Для $G = SU_3$ выразите $\dim V_\lambda(\nu)$ явно в виде кусочно-линейной функции от λ и ν.

13. Докажите, что для $G = U_n$ характеры неприводимых представлений являются полиномами Шура.