Задачи по группам и алгебрам Ли – 11. Модули Верма.

В этом листке используются обозначения предыдущего листка. Мы будем рассматривать (в том числе, бесконечномерные) представления комплексной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (или, по-другому, $\mathfrak{g}$-модули). *Характером* $\mathfrak{g}$-модуля V называется формальный ряд от $\dim T$ переменных, равный по определению $\chi_V(t) := \sum\limits_{\nu\in\mathfrak{h}^*} t^\nu \dim V(\nu)$. Для того чтобы характер был корректно определен, представление V должно раскладываться в прямую сумму весовых подпространств $V = \bigoplus\limits_{\nu\in\mathfrak{h}^*} V(\nu)$, причем весовые пространства $V(\nu)$ должныбыть конечномерными. Заметим, что веса ν, вообще говоря, могут не лежать в решетке X, а весовое подпространство определяется просто как собственное подпространство для операторов из картановской подалгебры $\mathfrak{h}$ собственным значением $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Борелевской подалгеброй называется подалгебра Ли $\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus\limits_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$ в $\mathfrak{g}$.

1. а) Докажите, что подалгебра $\mathfrak{b}_+$ является максимальной разрешимой подалгеброй в $\mathfrak{g}$; **б)** Докажите, что подалгебра $\mathfrak{n}_+ := \bigoplus\limits_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$ является коммутантом подалгебры $\mathfrak{b}_+$ и максимальной нильпотентной подалгеброй в $\mathfrak{g}$.

Нам понадобится также "противоположная" нильпотентная подалгебра $\mathfrak{n}_- := \bigoplus\limits_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$.

2. а) Докажите, что во всяком конечномерном представлении V алгебры Ли $\mathfrak{g}$ есть вектор v, собственный относительно $\mathfrak{b}_+$ (такие векторы называются *особыми*). *Указание:* воспользуйтесь теоремой Ли. **б)** Докажите, что в этом случае $U(\mathfrak{n}_-)v$ является подпредставлением в V. *Указание:* воспользуйтесь теоремой Пуанкаре-Биркгофа-Витта.

3. а) Докажите, что для $v \in V(\nu)$ вектор $e_\alpha v$ лежит в $V(\alpha+\nu)$. **б)** Докажите, что неприводимое конечномерное представление имеет единственный особый вектор. **в)** Докажите, что этот особый вектор лежит в весовом пространстве старшего веса, и старший вес единственен.

Пусть $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ и $\mathbb{C}_\lambda$ – одномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{b}_+$, такое, что $\mathfrak{n}_+$ действует нулем, а $\mathfrak{h}$ действует через функционал λ. *Модулем Верма* о старшим весом λ называется (бесконечномерное) представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве $M_\lambda := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}_+)} \mathbb{C}_\lambda$.

4. а) Докажите, что модуль Верма является свободным $U(\mathfrak{n}_-)$-модулем с образующей v_λ (т.е. отображение $U(\mathfrak{n}_-) \to M_\lambda,\ f \mapsto fv$ взаимно однозначно). **б)** Докажите, что $M_\lambda = \bigoplus\limits_{\nu\le\lambda} M_\lambda(\nu)$, и весовые пространства $M_\lambda(\nu)$ конечномерны. **в)** Докажите, что модуль Верма приводим тогда и только тогда, когда в нем есть особые векторы, не являющиеся старшими.

5. а) Докажите, что модуль Верма имеет единственный минимальный фактормодуль. **б)** Докажите, что если минимальный фактор модуля Верма конечномерен то $\lambda \in X_+$. *Указание:* для каждой из корневых sl_2-троек, представление алгебры Ли sl_2, порожденное из старшего вектора, должно быть конечномерным. **в*)** Докажите, что верно и обратное. *Указание:* постройте действие группы Вейля на множестве весов представления V_λ, выразив простые отражения через корневые образующие $e_{\alpha_i}, f_{\alpha_i}$.

6. а) Докажите, что всякое представление, порожденное старшим вектором веса λ, является гомоморфным образом модуля Верма M_λ. **б)** Докажите, что все неприводимые модули с данным старшим весом изоморфны. **в)** Докажите, что всякое *конечномерное* неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеет вид V_λ, где $\lambda \in X_+$.

Элементом Казимира называется элемент $C := \sum_a x^a x_a \in U(\mathfrak{g})$, где $x_a, x^a, a = 1, \ldots, \dim\mathfrak{g}$ – двойственные базисы относительно инвариантного скалярного произведения на $\mathfrak{g}$. Оператор,

которым элемент C действует в каком-либо представлении алгебры Ли $\mathfrak{g}$, называется *оператором Казимира*.

7. а) Вычислите собственное значение оператора Казимира на старшем векторе веса λ (и докажите, что такой вектор всегда собственный). *Указание:* значение равно $(\lambda+\rho,\lambda+\rho)-(\rho,\rho)$. **б)** Докажите, что на модуле Верма M_λ оператор Казимира действует скаляром. *Указание:* проверьте или вспомните, что элемент Казимира лежит в центре универсальной обертывающей алгебры.

8. а) Докажите, что всякий конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль имеет резольвенту, члены которой являются многократными расширениями модулей Верма при помощи модулей Верма. **б)** Пользуясь оператором Казимира, покажите, что эта резольвента имеет конечную длину.

9. а) Найдите характер модуля Верма со старшим весом λ (т.е. функцию $\sum t^\nu \dim M_\lambda(\nu)$). *Указание:* он равен произведению t^λ на характер $S(\mathfrak{n}_-)$ по теореме Пуанкаре-Биркгофа-Витта и задаче 4а. **б)** Докажите, что характер любого конечномерного неприводимого представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеет вид $\frac{P(t)}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta_+}(t^{\frac{\alpha}{2}}-t^{-\frac{\alpha}{2}})}$, где $P(t)$ – полином Лорана, кососимметричный относительно группы Вейля. *Указание:* воспользуйтесь задачей 8. **в)** Докажите, что если коэффициент при t^μ в многочлене $P(t)$ не равен нулю, то $\mu\le\lambda$ и $(\mu+\rho,\mu+\rho)=(\lambda+\rho,\lambda+\rho)$. **г)** Докажите, что если коэффициент при t^μ в многочлене $P(t)$ не равен нулю, то $\mu+\rho=w(\lambda+\rho)$ для некоторого $w\in W$. **д)** Докажите формулу Вейля для характера.