Листок 10. Ряды Фурье

Анализ, 2 курс, **24.04.2015**

10◇1 **а)** Разложите функцию $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$. Запишите равенство Парсеваля.
б) В каких точках этого отрезка ряд Фурье сходится к значению самой функции в этой точке?
в) Те же вопросы для функции $f(x) = \frac{1}{5-4\cos x}$.

10◇2 Найдите хотя бы одно решение $u(x,t)$ дифференциального уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на полуплоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ с указанным начальным условием:
а) $u(x,0) = \cos x$; **б)** $u(x,0) = \cos 2x$; **в)** $u(x,0) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$; **г)** $u(x,0) = \frac{1}{5-4\cos x}$.
Указание. Попробуйте сначала искать решение в виде $u(x,t) = u(x,0)f(t)$.

10◇3 Найдите необходимые и достаточные уловия на последовательность $\{c_k\}$ для того, чтобы она была последовательностью коэффициентов Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$:
а) некоторого тригонометрического многочлена (т.е. многочлена от $\cos x$ и $\sin x$) степени не более n;
б) некоторого многочлена степени не более n, заданного на полуинтервале $(-\pi, \pi]$ и периодически продолженного на $\mathbb{R}$.

Обозначим через $L_2(S^1)$ множество 2π-периодических измеримых функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, для которых существует $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx$. Обозначим через $L_2(\mathbb{Z})$ множество функций $c\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, для которых существует $\sum_{-\infty}^{\infty} |c(n)|^2$. Для функции $f \in L_2(S^1)$ обозначим через $F(f) = \hat{f}$ последовательность ее коэффициентов Фурье: $\hat{f}(n) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\,dx$. Через $(f * g)(x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy$ и $(c * d)(n) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} c(m)d(n-m)$ обозначим *свертку* функций $f(x), g(x) \in L_2(S^1)$ и $c(n), d(n) \in L_2(\mathbb{Z})$.

10◇4 **а)** Вычислите $e^{inx} * e^{imx}$.
б) Вычислите $f * f$, где функция $f(x)$ задана на полуинтервале $(-\pi, \pi]$ формулой $f(x) = x$ и периодически продолжена на $\mathbb{R}$.
в) Вычислите $c(k) * d(k)$, где $c(k) = k\delta_{k,a}$ и $d(k) = k\delta_{k,b}$.
г) Докажите равенство $F(f * g) = F(f)F(g)$ для любых $f, g \in L_2(S^1)$.
д) * Докажите равенство $F(fg) = F(f) * F(g)$ для любых $f, g \in L_2(S^1)$.
е) Докажите равенство $F(df/dx)(k) = ikF(f)(k)$ для любой $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L_2(S^1)$.

10◇5 Докажите, что если $f(x) \in C^N(\mathbb{R})$, то ряд $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{2N} |\hat{f}(n)|^2$ абсолютно сходится.

Преобразованием Фурье функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ назовем функцию $\hat{f}(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x)\,dx$. В следующей задаче этот интеграл понимается как главное значение несобственного интеграла Римана.

10◇6 Вычислите преобразование Фурье следующих функций, заданных на $\mathbb{R}$:
а) $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ **б)** $f(x) = \begin{cases} 1/x^2, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$; **в)** $f(x) = e^{-x^2/2}$.

10◇7 Найдите хотя бы одно решение $u(x,t)$ дифференциального уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на полуплоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ с заданным начальным условием:
а) $u(x,0) = x$; **б)** $u(x,0) = x^2$; **в)** * $u(x,0) = x^n$; **г)** $u(x,0) = e^{-x^2/2}$.

10◇8 **а)** Докажите, что *многочлены Эрмита* $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ удовлетворяют дифференциальному уравнению $y'' - 2xy' + 2ny = 0$ на множестве $\mathbb{R}$.
б) Найдите симметричный оператор L на пространстве $C^2(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ со скалярным произведением $(f,g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\bar{g}(x)dx$, для которого $f(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}$ удовлетворяет уравнению $L(f) = nf$.
в) Докажите, что при $m \neq n$ многочлены Эрмита H_m и H_n ортогональны относительно скалярного произведения $\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\bar{g}(x)e^{-x^2}dx$ и вычислите $\langle H_n, H_n\rangle$.
г) Объясните связь пунктов б) и в) с задачей 4 из листка 9.