

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, СЕМИНАР 29.04.2015

1. Напоминание – монодромия (представление монодромии) системы задаётся набором матриц $G_{a_1}, \dots, G_{a_n}$, определённым с точностью до общего сопряжения. Локальная монодромия в $z = a_i$ это класс эквивалентности $\langle G_{a_i} \rangle$ по сопряжению, то есть, орбиты присоединённого действия. Показатели $\{\beta_i^j\}$ системы $\frac{dy}{dz} = B(z)y$ в точке $z = a_i$ суть собственные значения матрицы $\text{res}_{z=a_i}(B(z)dz)$. Собственные значения $\{\mu_i^j\}$ локальной монодромии в $z = a_i$ связаны с показателями как $\exp(2\pi\sqrt{-1}\beta_i^j) = \mu_i^j$. Если никакие два показателя в точке $z = a_i$ не отличаются на натуральное число, то $\langle G_{a_i} \rangle = \langle \exp(2\pi\sqrt{-1} \text{res}_{z=a_i}(B(z)dz)) \rangle$.

a) Найдите локальную монодромию системы $\frac{dy}{dz} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}}{z}y$ соответствующую обходу вокруг точки $z = 0$.

b) Найдите локальную монодромию системы $\frac{dy}{dz} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ \frac{40}{9} & -3 \end{pmatrix}}{z-1}y$ соответствующую обходу вокруг точки $z = 1$.

c) Может ли представление монодромии системы

$$\frac{dy}{dz} = \left[\frac{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}}{z} + \frac{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ \frac{40}{9} & -3 \end{pmatrix}}{z-1} \right] y$$

быть приводимым? Найдите $\langle G_\infty \rangle$.

d)* (Как решать задачу 7 из листка 1) Для системы из предыдущего пункта. Пусть y_1 собственный вектор монодромии вокруг нуля, y_2 собственный вектор монодромии вокруг единицы. Какой вид в базисе $Y = (y_1, y_2)$ имеют матрицы монодромии вокруг нуля и единицы? Покажите, что перескалированием $y_1 \rightsquigarrow \lambda y_1$ можно сделать наддиагональный элемент матрицы G_0 равным единице. Проверьте, что единственный оставшийся неизвестным элемент пары матриц G_0, G_1 однозначно восстанавливается из того что $G_0 G_1 G_\infty = 1$, а собственные значения G_∞ уже известны.

2. Найдите локальную монодромию вокруг $z = 0$

$$y' = \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{2}z^2}y, \quad y' = \frac{\cos z^2 - 1}{z^3}y \quad y'' + (\text{ctg } 2z + e^z)y' = 0$$

3. Найдите локальную монодромию системы $\frac{dy}{dz} = B(z)y$ при обходе вокруг нуля в положительном направлении, где

$$B(z) = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 2 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B(z) = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 2 & z^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$