Теория функций комплексного переменного – 2015
Листок 6

срок сдачи 12.06.2015

1. Вычислите следующие сингулярные интегралы, определенные в смысле главного значения:

а) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z^2\,dz}{z^3-1}$;

б) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{t^2}{\sqrt{a^2-t^2}}\,\frac{dt}{t-x} \quad (a>0,\ -a<x<a)$;

2. Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ – аналитическая функция в верхней полуплоскости, ограниченная в ∞, а $u(x) = u(x,0)$, $v(x) = v(x,0)$ – предельные значения ее действительной и мнимой частей на вещественной оси. Докажите формулы преобразования Гильберта:

$$v(x) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{t-x}\,dt + v(\infty), \quad u(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t)}{t-x}\,dt + u(\infty).$$

Пусть D – некоторая область. Гармонической мерой $\omega(z;\gamma,D)$ граничной дуги $\gamma \subset \partial D$ в точке z относительно области D называется ограниченная, гармоническая в D функция, равная 1 во внутренних точках дуги γ и 0 во внутренних точках остальной части границы.

3. Докажите, что $0 \le \omega(z;\gamma,D) \le 1$ при всех $z \in \bar{D}$. В каких случаях может достигаться равенство, если z лежит внутри области D?

4. Найдите гармонические меры в следующих случаях:

а) D – верхняя полуплоскость, γ – отрезок $[-1,1]$;

б) D – круг $|z|<R$, γ – полуокружность $|z|=R$, $\operatorname{Re} z > 0$;

г) D – кольцо $r<|z|<R$, γ – окружность $|z|=r$.

Пусть D – односвязная область. Функцией Грина G области D называется функция $G(z,\zeta) = \log|z-\zeta| + g(z,\zeta)$ на $D\times D$ такая, что:

1) $G(z,\zeta) = G(\zeta,z)$ и $G(z,\xi) = 0$ при любых $z \in D$ и $\xi \in \partial D$;

2) функция $g(z,\zeta)$ непрерывна в $D\times D$ и непрерывна по ξ в $\bar{D}$ при всех $z \in D$;

3) функция $g(z,\zeta)$ гармонична по z при всех $\zeta \in D$ и гармонична по ζ при всех $z \in D$.

5. а) Найдите функцию Грина, если D – круг радиуса R с центром в точке $a \in \mathbb{C}$.

б) Найдите функцию Грина, если D – верхняя полуплоскость.

в) Докажите, что функция Грина единственна и дается формулой

$$G(z,\zeta) = \log\left|\frac{w(z)-w(\zeta)}{1-w(z)\overline{w(\zeta)}}\right|,$$

где $w(z)$ – взаимно однозначное конформное отображение (односвязной) области D на единичный круг (существующее в силу теоремы Римана).

г)* Докажите, что функция Грина дает решение граничной задачи Дирихле в области D с помощью формулы

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial D} u(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}G(z,\xi)\,|d\xi|,$$

где $\partial/\partial n_\xi$ – нормальная производная по второму аргументу (единичные нормальный вектор считается направленным во внешность области). Объясните, почему эта формула эквивалентна следующему выражению для гармонической меры инфинитезимальной дуги $|d\xi|$ границы области D: $\omega(z;|d\xi|,D) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_\xi}G(z,\xi)\,|d\xi|$.