Теория функций комплексного переменного
27 апреля 2015

1. Какие из следующих дифференциалов являются всюду голоморфными на римановой поверхности функции $y = \sqrt{z^4 - 1}$:

$$\text{а) } dz, \quad \text{б) } \frac{dz}{\sqrt{z^4-1}}, \quad \text{в) } \frac{zdz}{\sqrt{z^4-1}}, \quad \text{г) } \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} \,?$$

В каких точках расположены нули этих дифференциалов?

2. Найдите два линейно-независимых мероморфных дифференциала на римановой поверхности функции $y = \sqrt{z^3 - 1}$ с полюсом второго порядка в бесконечности, а в остальном голоморфных.

3. Рассмотрим риманову поверхность функции $y = \sqrt{z(z+2)(z^2-2)}$.

а) Докажите, что дифференциал

$$\omega_{PQ} = \frac{1}{2}\left(\frac{y+4}{z-2} - \frac{y+1}{z+1}\right)\frac{dz}{y}$$

имеет в точках $P = (z = 2, y = 4)$, $Q = (z = -1, y = 1)$ простые полюсы с вычетами ± 1, а в остальном голоморфен на этой поверхности.

б) Найдите на этой римановой поверхности дифференциал, который имеет простые полюсы в точках $Q_\pm = (z = -1, y = \pm 1)$ с вычетами ± 1, а в остальном голоморфен.

в) Тот же вопрос про точки $O = (0, 0)$ и $Q = (z = -1, y = 1)$.

г) Тот же вопрос про точки $O = (0, 0)$ и $R = (-2, 0)$.

4. Рассмотрим риманову поверхность функции $y = \sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}$, где параметры $g_2, g_3 \in \mathbb{R}$ таковы, что подкоренное выражение не имеет кратных нулей и $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 > 0$.

а) Докажите, что пространство голоморфных дифференциалов на ней одномерно и найдите дифференциал Ω, его порождающий.

б) Исследуйте отображение z-плоскости $u(z) = \int_z^\infty \Omega$ (эллиптический интеграл 1-го рода в форме Вейерштрасса).

в) Проследите, как отображение $u(z)$ переводит комплексную кривую $y^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3$ в тор $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\{2m\omega_1 + 2n\omega_2\}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, где $\omega_2/\omega_1 \in i\mathbb{R}_+$. Как устроено обратное отображение? В какой дифференциал на $\mathbb{T}$ переходит при этом дифференциал Ω?